வெக்டர் பகுப்பாய்வு
(VECTOR ANALYSIS)

ச. இராமசுப்பிரமணியன்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க. வெ.) வரிசை எண் - 296

வெக்டர் பகுப்பாய்வு

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

ஆசிரியர் :
ச. இராமசுப்பிரமணியன், எம்.ஏ.,
கணிதப் பேராசிரியர், அரசினர் கலைக் கல்லூரி,
கிருட்டிணகிரி.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—February, 1972
T.N.T.B.S. (C.P.) No. 296

© Tamil Nadu Text Book Society

VECTOR ANALYSIS
S. RAMASUBRAMANIAN

Net Price Rs. 6-00
(No discount)

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of Government of India in the Ministry of Education and social welfare.'

Printed by
Kabeer Printing Works,
Madras-5.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி—உள்ளாட்சித்துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினோராண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.) 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். 'தமிழிலேயே கற்பிப்போம்' என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்றுவருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'வெக்டர் பகுப்பாய்வு' என்ற இந்நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 296 ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 331 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந்நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக் கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனமகலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

			பக்கம்
1.	வெக்டர் கூட்டலும் கழித்தலும்	...	1
2.	புள்ளிப் பெருக்கல்	...	57
3.	வெக்டர் பெருக்கல்	...	78
4.	இரண்டுக்கு மேற்பட்ட வெக்டர்களின் பெருக்கல்	...	101
5.	வடிவ கணிதத்தில் வெக்டர் முறையைப் பின்பற்றுதல்	...	130
6.	பரப்புகள், கன அளவுகள்	...	182
7.	வெக்டர் நுண்கணிதம் : வகை நுண்கணிதம்	...	190
8.	தொகை காணல்	...	252
	விடைகள்	...	314
	துணை நூல்களின் பட்டியல்	...	320
	கலைச்சொற்கள்	...	321

1. வெக்டர் கூட்டலும் கழித்தலும்

முன்னுரை

இயற்பியலிலும் (physics) வேறுபல துறைகளிலும் நாம் காணும் அளவுகளை, கணியங்களை (quantities) இருவகைப்படுத்தலாம். ஒரு சில கணியங்கள் எண் அளவு (numerical magnitude) மட்டிலும் தெரிந்தாலே அறுதியிட்டு நிர்ணயிக்கத்தக்கனவாயிருக்கும். மூவளவை வெளியில் (3-dimentional space) அவற்றின் திசை என்ன என்பது தேவைப்படுவதில்லை. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பொருளின் திறை அல்லது பொருண்மை (mass), கன அளவு (volume), அடர்த்தி (density), நேரம், வெப்பநிலை, வீத வெப்ப மானம் (specific heat) முதலியன எண் அளவுமட்டும் கொண்டு, திசைக் குறிப்புத் தேவையில்லாதனவாகும். இம்மாதிரி கணியங்களைத் தான் (scalar) 'திசையிலா அளவுரு' அல்லது 'திசையிலி' என்கிறோம். இம்மாதிரி கணியங்களைக் கணிக்க நாம் ஏதோ ஓர் அளவுகோல் அல்லது அலகு (unit) கொண்டு அளந்து, அவ்வளவினை ஒரு மெய்யெண்ணால் குறிக்கிறோம். இதற்கு மாறாக, அளவோடு திசையும் சேர்ந்தால்மட்டிலுமே உண்மையான பொருள் கொடுக்கும் சில கணியங்களையும் நாம் காண்கிறோம். அவற்றினை 'Vectors' என்று ஆங்கிலத்தில் அழைக்கிறோம். திசையோடு அளவும் கொண்டு விளங்குவதால் அவற்றைத் தமிழில் 'திசையளவுரு' என்று சொல்ல லாம் எனச் சிலர் கருதுகின்றனர். சுருக்கத்திற்காகத் 'திசையி' என்று அழைக்கலாம் என்பது வேறு சிலரின் கருத்தாகும். இன்னும் சிலர் 'வெக்டர்' என்றே எழுதலாம் எனக் கருதுகின்றனர். அக்கருத்தினையே நாமும் ஏற்று, இனி வரும் பகுதிகளில் எல்லாம் 'வெக்டர்' என்ற சொல்லையே பயன்படுத்துவோம்.

அளவுடன் திசையும் சேர்ந்த ஒரு கணியத்திற்கு எடுத்துக்காட்டாகச் சில சொல்லலாம். ஒருவன் மேற்கிலிருந்து கிழக்கு நோக்கி மணிக்கு 10 மைல் வேகத்தில் செல்கிறான் எனவும், வேறொருவன் கிழக்கிலிருந்து மேற்கு நோக்கி மணிக்கு 10 மைல் வேகத்தில் செல்கிறான் எனவும்

கொள்வோம். இரண்டு மனிதர்களின் வேகங்களும் அளவில் சமமான போதிலும் திசையில் மாறுபடுகின்றன. எனவே விளைவுகளும் மாறுபடும். எனவேதான் ஒரு பொருளின் 'திசை வேகம்' (velocity) வெக்டர் எனப் பாகுபாடு செய்யப்பட்டுள்ளது. இது போன்றே இடப் பெயர்ச்சி (displacement), முடுக்கம் (acceleration), விசை (force) முதலியனவும் வெக்டர்களாகும். ஒருவன் ஒரு புள்ளியிலிருந்து கிளம்பி, நேர் கிழக்காக 1 மைல் தூரம் சென்று, மீண்டும் நேர் மேற்கில் 1 மைல் தூரம் நடந்தால், ஆரம்பித்த புள்ளியை வந்தடைவான். எனவே இவ்விரு இயக்கங்களிலும் ஏற்பட்ட மொத்த இடப் பெயர்ச்சி பூச்சியமாகும். இங்கு, இடப்பெயர்ச்சியைக் கவனிக்கும் போது அதன் அளவைமட்டும் எடுத்துக்கொண்டால் போதாது; திசையும் வேண்டும். மேற்கிலிருந்து கிழக்காகச் செல்வது + எனக் கருதப்பட்டால், எதிர்த்திசை – ஆக எடுத்துக் கொள்ளப்பட வேண்டும். எனவேதான் இடப்பெயர்ச்சி ஒரு வெக்டர் என்கிறோம். இவ்வாறு, வடிவகணிதம், இயக்கவியல், இயற்பியல் போன்ற பல துறைகளிலும் பகுப்பாய்வு செய்யப்படுகின்ற அமைப்புகளில் வெக்டரும் ஒன்றாகும். அணிகள் (Matrices), டென்சர்கள் (Tensors) போன்ற அமைப்புகளும் உள்ளன. அளவும் திசையும் கொண்ட இயற்பியல் கணியங்களை ஆராய்வதில் வெக்டர்கள் சிறப்பாகப் பயன்படுகின்றன. எண்கள் அமைப்பும் (system of numbers) இம்மாதிரி ஆய்வுக்குப் பயன்படும் என்றபோதிலும், வெக்டர்களைப் போன்று அவ்வளவு சிறப்பாக அமைவதில்லை. ஏனெனில், திசை, அளவு ஆகிய இரண்டையும் தனித்தனியே காட்டுவதற்காக எண்களின் தொகுதிகளைப் பயன்படுத்த வேண்டியிருக்கும்; ஆனால் வெக்டரில், ஒரு வெக்டரே, அளவு, திசை ஆகிய இரண்டினையும் குறிக்கிறது. எனவே வெக்டரைப் பயன்படுத்துவது எளிதாகவும் இயற்கையாகவும் அமைகிறது.

§ 1·01. திசைக் குறியிட்ட நேர் கோட்டுத் துண்டுகள் (Directed line segments)

வெக்டரைக் குறிக்கும் முறை : அளவும் திசையும் கொண்ட எந்த ஒரு பொருளும் வெக்டரால் குறிக்கப் பெறும் தகுதிவாய்ந்ததாகையால், அப்பொருளையே வெக்டர் எனச் சொல்வது வழக்கம். எடுத்துக்காட்டாக, திசை வேகம், முடுக்கம் முதலியனவற்றை 'வெக்டர்' என்று சொல்கிறோம் அல்லவா? வெறும் அளவுருக்களிலிருந்து வெக்டரை வேறுபடுத்திக் காட்டுவதற்காக, இப்புத்தகத்தில் நாம் எழுத்துக்களின்மீது தலைக்கோடிட்டுக் காட்டுகிறோம். (அல்லது கனத்த அச்சில் பதிக்கப்பெற்ற தடித்த எழுத்துகளைப் பயன்படுத்தலாம். அச்சில் பதிப்பிப்பதற்கு இது சாத்தியமே தவிர, சாதாரணமாக

எழுதும்போது தடித்த எழுத்து முறை எளிதன்று. எனவே தலைக் கோடிட்டு எழுதும் முறையையே மாணவர்கள் மேற்கொள்ள வேண்டும்.)

படத்தின் மூலம் ஒரு வெக்டரைக் குறிக்க, திசைக் குறியிட்ட நேர்கோட்டுத் துண்டினைப் பயன்படுத்துகிறோம். கீழே உள்ள படத்தில் காட்டியவாறு $\overline{AB}$ என்ற நேர்கோட்டுத் துண்டு Aயினை ஆரம்பப்புள்ளியாகவும் (initial point) Bயினை முடிவுப்புள்ளியாகவும் (terminus) கொண்டு, Aயிலிருந்து Bக்கு என்ற திசையையும், AB என்ற அளவினையும் கொண்டு விளங்குவதால் $\overline{AB}$ ஒரு வெக்டரைக் குறிக்கிறது. $\overline{BA}$ என்று எடுத்துக் கொண்டால், $\overline{AB}$க்கு அளவில் மட்டும் சமமாயும், ஆனால் திசையில் அதற்கு எதிரானதுமான வெக்டரைக் குறிக்கும்.

படம் 1.

நீளம்: $\overline{AB}$யின் நீளம் ABயானது $|\overline{AB}|$ என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப் பெறும். எனவே $|\overline{AB}| = |\overline{BA}|$ என்பது வெளிப்படை. ஒரு வெக்டரின் 'எண் அளவு' (Modulus) என்பது அவ்வெக்டரின் நீளத்தை அளந்து கிடைக்கும் ஒரு மிகை எண்ணாகும் (Positive number). $\overline{a}$ என்ற வெக்டரின் எண் அளவைக் காட்ட $|\overline{a}|$ என்றும், சில சமயங்களில் a என்றும் எழுதுவதுண்டு.

திசைக் குறியிட்ட நேர் கோட்டுத் துண்டினைத் தன் பகுதியாய்க் கொண்ட, இருபுறமும் கந்தழி வரை நீட்டப்பட்ட நேர் கோட்டினை, 'தாங்கும் கோடு' அல்லது 'தாங்கி' (support) என்கிறோம்.

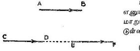
§ 1·02. வெக்டரின் வகைகள்

(i) **ஓரலகு வெக்டர்** (Unit Vector): ஒரு வெக்டரின் 'எண் அளவு' ஒன்று (1) எனில் அவ்வெக்டரை ஓரலகு வெக்டர் (unit vector) என்கிறோம். $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ எனும் வெக்டர்களின் திசையில் அமைந்த ஓரலகு வெக்டர்கள் முறையே $\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$, $\frac{\overline{b}}{|\overline{b}|}$, $\frac{\overline{c}}{|\overline{c}|}$ ஆகும். இவற்றை $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

(ii) **பூச்சிய வெக்டர்** (Zero Vector): எண் அளவு பூச்சியமாயுள்ள ஒரு வெக்டரைப் பூச்சிய வெக்டர் என்கிறோம். இந்த வகையில் ஆரம்பப் புள்ளியும் முடிவுப் புள்ளியும் ஒன்றோடொன்று ஒன்றிவிடும். எனவே இதன் திசை நிர்ணயிக்க இயலாது.

(iii) **ஒத்த வெக்டர்கள்** (Like Vectors): இணையான தாங்கும் கோடுகளையுடைய வெக்டர்கள் ஒத்த வெக்டர்கள் எனப்படும்.

(iv) **சம வெக்டர்கள்** (Equal Vectors): ஒரே அளவான எண்ணளவும், ஒரே திசையும் கொண்ட வெக்டர்கள் சம வெக்டர்கள் எனப்படும்.



படம் 2.

படத்தில் $AB = CD = EF$, எனுமாறும், $AB \parallel CD \parallel EF$ எனுமாறும் கோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன. $\therefore \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF}$.

(v) **எதிர்மறை வெக்டர்:** (Negative Vector): $\overline{a}$ எனும் கொடுக்கப்பட்ட வெக்டரின் எண்ணளவும் $\overline{a}$யின் திசைக்கு எதிர்த் திசையும் உடைய வெக்டரை $\overline{a}$யின் எதிர்மறை வெக்டர் என்கிறோம். இதனை $-\overline{a}$ எனக் குறிக்கிறோம்.

(vi) **கட்டிலா வெக்டர்** (Free Vector): கொடுக்கப்பட்ட ஒரு வெக்டரின் தாங்கும் கோட்டிற்கு இணையாக மூவளவை வெளியில் எத்தனையோ கோடுகள் வரைய இயலும். அக்கோடுகளில் எடுக்கப்படும், திசைக் குறியிட்ட, கொடுக்கப்பட்ட வெக்டரின் எண்ணளவிற்குச் சம நீளமுள்ள, நேர் கோட்டுத் துண்டுகள் அனைத்தும், கொடுக்கப்பட்ட வெக்டருக்குச் சமம். எனவே வெக்டரின் ஆரம்பப்புள்ளி குறிப்பிடப் படாத வரையிலும், அவ்வெக்டரை 'கட்டிலா வெக்டர்' (free vector) என்கிறோம்.

(vii) **அறுதியிட்ட வெக்டர்** (Localised Vector): வெக்டரின் ஆரம்பப்புள்ளி அறுதியிட்டுக் கூறப்பட்டு விட்டால், அப்புள்ளி வழியே, கொடுக்கப்பட்ட எண்ணளவும், திசையும் கொண்டதாய் ஒரேவொரு வெக்டர்தான் வரைய இயலும். எனவே இவ்வகை வெக்டர்களை அறுதியிட்ட வெக்டர்கள் (localised vectors) என்கிறோம்.

(viii) **தலைகீழ் வெக்டர்** (Reciprocal Vector): $\overline{a}$ எனும் கொடுக்கப்பட்ட வெக்டரின் திசையில் அமைந்து ஆனால் எண் அளவு $\frac{1}{|\overline{a}|}$ கொண்ட ஒரு வெக்டரை $(\overline{a})^{-1}$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம்.

$$\overline{a} = a\,\hat{a} \text{ எனில், } (\overline{a})^{-1} = \frac{\hat{a}}{a} = \frac{1}{a}\,\frac{\overline{a}}{a} = \frac{\overline{a}}{a^2}$$

§ 1·03. வெக்டர் கூட்டல், கழித்தல்

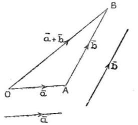
$\overline{a}$, $\overline{b}$ எனும் இரு வெக்டர்களைக் கூட்ட, O எனும் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி வழியே $\overline{OA}$ எனும் வெக்டரை $\overline{a}$க்குச் சமமாகவும், $\overline{AB}$ எனும் வெக்டரை $\overline{b}$க்குச் சமமாகவும் வரைக. OBயைச் சேர்ப்பதால் கிடைக்கும் வெக்டர் $\overline{OB}$தான், $\overline{a}+\overline{b}$ எனும் கூட்டலாகும்.

அதாவது

$$\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$$

$$\text{i.e. } \overline{a}\div\overline{b}=\overline{OB}.$$

இவ்வாறு கூட்டப் பெறுவது Oவின் நிலையைச் சார்ந்ததில்லை. Oவின் எந்த நிலைக்கும் இது பொருந்தும்.



படம் 3.

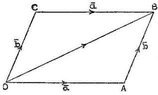
இந்த கூட்டலின் வரையறையிலிருந்து OA எனும் நீளத்தினையும் AB எனும் நீளத்தினையும் கூட்டினால் OB என்ற நீளம் கிடைக்கும்போலும் என்று தவறுகப் புரிந்துகொள்ளக்கூடாது. ஏனெனில், ஒரு முக்கோணத்தின் எந்த இரு பக்கங்களின் கூட்டலும் மூன்றுவது பக்கத்தைவிடப் பெரிதாகத்தான் இருக்கும். இங்கு வெக்டர்களின் கூட்டலின் பொருள் என்ன என்பதை ஓர் எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்குவோம். $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ எனும் வெக்டர்கள் ஒரு பொருளின் இடப் பெயர்ச்சிகள் எனக் கொண்டால், இவ்விரு இடப்பெயர்ச்சிகளின் மொத்த விளைவு, இணைவாக்க விளைவு (Resultant) $\overline{OB}$ எனும் இடப் பெயர்ச்சியாகும். அஃதின்றி OA, OB என்ற தூரங்களின் கூட்டலுக்குச் சமமாகாது. இதுபோன்றே மற்றைய வெக்டர்களைக் கூட்டும் போது, அவ்வெக்டர்கள் இணைந்து செயல்படுவதால் ஏற்படும் மொத்த விளைவைத்தான் வெக்டர் கூட்டல் என்கிறோமேயன்றி எண் கணிதக் கூட்டல் (Arithmetical addition) என்ற பொருளில் கூட்டவில்லை.

வெக்டர் கூட்டல், தொகுப்பு விதியையும் (Associative law) மாற்று விதியையும் (Commutative law) பின்பற்றுகிறது எவ்வாறென்பதைக் கீழ்க்கண்ட நிருபணத்தில் காணலாம்.

மாற்று விதி: $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$. படத்தில் $\overline{OA}=\overline{a}$, $\overline{AB}=\overline{b}$.

∴ கூட்டலின் வரையறைப்படி $\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$.

$$\text{i.e. } \overline{a}+\overline{b}=\overline{OB} \quad \text{.........(1)}$$



படம் 4.

OA, AB இரு அண்டைப் பக்கங்களாய் அமையுமாறு $OABC$ என்ற இணைகரத்தினை வரைக. OCயும், ABயும் இணைகரத்தின் எதிர்ப் பக்கங்கள்; ஆகையால் இணையாயும் சமமாயுமிருக்கும். $\therefore \overline{OC} = \overline{AB} = \bar{b}$ ஆகும். இதேபோல், $\overline{OA} = \overline{CB} = \bar{a}$ ஆகும்.

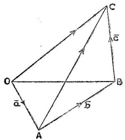
வெக்டர் கூட்டல் வரையறைப்படி

$\overline{OC} + \overline{CB} = \overline{OB}$ ஆகும்.

அதாவது $\bar{b} + \bar{a} = \overline{OB}$ ......(2)

எனவே (1), (2)ல் இருந்து $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ என்பது உண்மையாகிறது.

தொகுப்பு விதி : $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$.



படம் 5.

படத்தில் $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{BC} = \bar{c}$ என்க.

$\therefore$ கூட்டல் விதிப்படி

$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

i.e. $\bar{b} + \bar{c} = \overline{AC}$.

மேலும் $\overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OC}$;

அதாவது $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$
$= \overline{OC}$ ....(1).

இதேபோல், கூட்டல் விதிப்படி

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$$

ஆகும்.

அதாவது $\overline{OB} = \bar{a} + \bar{b}$;

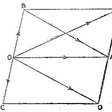
மேலும் $\overline{OB}+\overline{BC}=\overline{OC}$

அதாவது $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c} = \overline{OC}$..........(2).

எனவே (1), (2)ல் இருந்து $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$ என்பது பெறப்படும்.

அதாவது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட வெக்டர்களைக் கூட்டும்போது, அவ்வெக்டர்களின் வரிசை முறையைப் பொறுத்து அக்கூட்டல் அமைவதில்லை ; வெக்டர்களை எந்த வரிசை முறையிலும் கூட்டலாம் என்பது புலனாகிறது.

இனி ஒரு வெக்டரிலிருந்து மற்றொரு வெக்டரைக் கழிப்பதன் பொருளை விளக்குவோம். $\overline{b}$ என்ற வெக்டரின் எண்ணளவும் அதன் திசைக்கு எதிர்த்திசையும் உடைய வெக்டரை எதிர்மறை வெக்டர் என வரையறுத்தோம். அதாவது $-\overline{b}$ என்று சொன்னோம். எனவே $\overline{a}$ எனும் வெக்டரிலிருந்து $\overline{b}$ எனும் வெக்டரைக் கழிக்க வேண்டுமானால், $-\overline{b}$யை $\overline{a}$யுடன் கூட்ட வேண்டும். படத்தில் $\overline{OA}=\overline{a}$, $\overline{OB}=\overline{b}$ என்க. BOவை, $BO=OC$ எனும்படி C வரை நீட்டுக. அப்படியானால் $\overline{OC}=-\overline{b}$ ஆகும். இணைகரம் $OCDA$யை முழுமையாக்குவோம். கூட்டல் வரையறைப்படி $\overline{OD}$ என்ற வெக்டர் $\overline{OA}$, $\overline{OC}$களின் கூட்டலாகும். அதாவது $\overline{OD}=\overline{a}-\overline{b}$.



படம் 6.

படத்தில் காட்டியவாறு இணைகரம் $OAEB$யை முழுமையாக்கினால், மூலைவிட்டம் OE $\overline{a}+\overline{b}$யையும், $\overline{BA}$ என்ற மூலைவிட்டம் $\overline{a}-\overline{b}$யையும் குறிக்கின்றன.

§ 1·04. வெக்டர்களைத் திசையிலியால் பெருக்குதல் (Multiplication of vectors by a scalar)

$\overline{a}$ என்பது ஒரு வெக்டர் எனவும், 'm' என்பது ஒரு திசையிலி எனவும் கொள்க. அப்படியானால் $m\overline{a}$ என்பது, m மிகை எண்ணானால், $\overline{a}$யின் திசையினைக் கொண்ட, ஆனால் எண்ணளவு $m|\overline{a}|$ கொண்ட ஒரு வெக்டரைக் குறிக்கும்; m குறைவெண்ணானால், $\overline{a}$யின் திசைக்கு எதிர்த்திசையில் அமைந்த, $m|\overline{a}|$ எண்ணளவு கொண்ட ஒரு வெக்டரைக் குறிக்கும்.

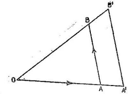
இனி வெக்டரைத் திசையிலியால் பெருக்குதல் பங்கீட்டு விதியைப் (Distributive law) பின்பற்றுகிறது என்பதை நிறுவலாம். அதாவது

$(m+n)\overline{a} = m\overline{a}+n\overline{a}$ ....(1) எனவும்

$m(\overline{a}+\overline{b}) = m\overline{a}+m\overline{b}$ ....(2) எனவும்

காட்டலாம்.

முதல் முடிவு வரையறையிலிருந்தே பெறப்படும். எவ்வாறெனில்; m-ம் n-ம் மிகை எண்களாயின் $(m+n)\overline{a}$ என்பது $\overline{a}$-யின் திசையில் $(m+n)|\overline{a}|$ எண்ணளவும் கொண்ட வெக்டராகும். அதே போல் $m\overline{a}$, $n\overline{a}$ என்பனவும் $\overline{a}$-யின் திசையில் முறையே $m|\overline{a}|$, $n|\overline{a}|$ எண்ணளவுகளையுடைய வெக்டர்களாகும். எனவே சமன்பாடு (1)ல் இருபுறமும், $\overline{a}$-யின் திசையில் அமைந்த $(m+n)|\overline{a}|$ எண்ணளவுடைய வெக்டரைக் குறிக்கின்றன. எனவே (1)வது சமன்பாடு உண்மையாகிறது. மேலும் $(m+n)$ என்பது குறைவெண்ணாகில் $(m+n)\overline{a}$ என்பது $\overline{a}$-யின் திசைக்கு எதிர்த்திசையிலமைந்த $|m+n|\ |\overline{a}|$ என்ற எண்ணளவுடைய வெக்டராகும்.



படம் 7.

m என்பது மிகை எண்ணாய் இருக்கும்போது $m(\overline{a}+\overline{b}) = m\overline{a}+m\overline{b}$ என்பதை இப்போது நிறுவுவோம். $\overline{OA}=\overline{a}$ எனவும், $\overline{AB}=\overline{b}$ எனவும் கொள்க.

$$\therefore\ \overline{OA}+\overline{AB} = \overline{OB}.$$
$$\text{i.e. } \overline{a}+\overline{b} = \overline{OB}.$$

OA, OBயின் நீட்சிகளில் A', B' எனும் புள்ளிகளை

$OA' = m\,.\,OA,\quad OB' = m\,.\,OB$ எனும்படி எடுத்துக் கொள்வோம். $\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{OB}{OB'} = \dfrac{1}{m}$ என்பதால்

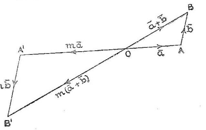
$AB \parallel A'B'$ ஆகும். மேலும் $A'B' = mAB$ ஆகவும் இருக்கும்.

இனி $\overline{OB'} = \overline{OA'}+\overline{A'B'}$

அதாவது $\overline{OB'} = m\overline{OA}+m\overline{AB}$.

$= m\overline{a}+m\overline{b}$.

$$\text{ஆனால் } \overline{OB}' = m\overline{OB}$$
$$= m(\overline{a}+\overline{b})$$
$$\therefore \quad m(\overline{a}+\overline{b}) = m\overline{a}+m\overline{b}.$$



படம் 8.

m என்பது குறைவெண்ணுனால், மேலே உள்ள படத்தில் காட்டியபடி AO, BOவின் நீட்சிகளில் $OA' = mOA.$, $OB' = mOB$ எனும்படி புள்ளிகள் எடுத்துக்கொள்க. இனி முன்போலவே $A'B'$ என்பது ABக்கு இணை என்பதும் mABக்குச் சமம் என்பதும் நிறுவலாம்.

$$\therefore \quad \overline{OB}' = \overline{OA}' + \overline{A'B}'$$
$$\text{i.e.} \quad m(\overline{a}+\overline{b}) = m\overline{a}+m\overline{b}.$$

§ 1·05. ஒரே கோட்டமை வெக்டர்கள் (Collinear Vectors)

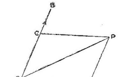
எண்ணளவுகள் வேறுபட்டிருப்பினும் ஒரே நேர்கோட்டிற்கு இணையான தாங்கும் கோடுகளையுடைய வெக்டர்கள் ஒரே கோட்டமை வெக்டர்கள் எனப்படும்.

இவ்வரையறையிலிருந்து ஒத்த வெக்டர்கள் (like vectors) ஒரே கோட்டமைவு உடையன என்பது பெறப்படும். மேலும் $\overline{a}$, $\overline{b}$ என்ற இரு வெக்டர்கள் ஒரே கோட்டமை வெக்டர்கள் எனில் அவற்றின் திசைகள் இணையாகவும், எண்ணளவுகள் மட்டிலும் மாறுபட்டவையாகவும் அமைவதால், $\overline{a} = m\overline{b}$ எனுமாறு 'm' எனும் திசையிலி எண் ஒன்றுகாண இயலும். இது மிகை எண்ணுகவோ, குறையெண்ணுகவோ, முழு எண்ணுகவோ, பின்னமாகவோ கூட இருக்கலாம்.

§ 1·06. ஒரே தள வெக்டர்கள் (Coplanar Vectors)

ஒரே தளத்தில் அமைகிற அல்லது ஒரே தளத்திற்கு இணையாய் அமைகிற வெக்டர்களை ஒரே தள வெக்டர்கள் அல்லது ஒரே தள அமைவுடைய வெக்டர்கள் என்கிறோம்.

தேற்றம் 1. ஒரே கோட்டமைவிலா வெக்டர்கள் $\overline{a}$, $\overline{b}$ கொடுக்கப்பட்டால், $\overline{a}$, $\overline{b}$யுடன் ஒரே தள அமைவுடைய வெக்டர் ஒவ்வொன்றினையும் $x\overline{a}+y\overline{b}$ என அவ்விரு வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக (linear combination) ஒரே ஒரு வழியில் எழுத இயலும். x, y என்பன ஏதோ ஒரு தகுந்த திசையிலி எண்கள்.



படம் 9.

$\overline{OA}=\overline{a}$, $\overline{OB}=\overline{b}$ என்பன ஒரே கோட்டமைவிலா இரு வெக்டர்கள் என்க. $\overline{OP}$ என்பது அவற்றுடன் ஒரே தள அமைவு உடைய வெக்டர் என்க. P வழியே OB, OAக்கு இணையான கோடுகள் வரைக. அவை OA, OBயை முறையே D, Cயில் வெட்டட்டும்.

$\overline{OD}$யும் $\overline{OA}$யும் ஒரே கோட்டில் அமைவதால்,

$\overline{OD}=x\cdot\overline{OA}$ எனுமாறு x எனும் திசையிலி காண இயலும். இதேபோல், $\overline{OC}$யும் $\overline{OB}$யும் ஒரே நேர் கோட்டில் அமைவதால், $\overline{OC}=y\cdot\overline{OB}$ எனுமாறு y எனும் திசையிலி ஒன்றும் காண இயலும்.

$PD \parallel OC$., $PC \parallel OD$ ஆகையால், $ODPC$ ஓர் இணைகரம்.

$\therefore \quad \overline{DP}=\overline{OC}=y\overline{b}$;

வெக்டர் கூட்டல்படி $\overline{OP} = \overline{OD}+\overline{DP}$
$= x\overline{a}+y\overline{b}$.

மேலும், கொடுக்கப்பட்ட OP என்ற நேர் கோட்டினை மூலைவிட்டமாகவும், OA, OBகளை அண்டைப் பக்கங்களாகவும் கொண்டு ஒரே ஓர் இணைகரந்தான் வரைய இயலும். எனவே $\overline{OP}$ என்ற வெக்டரை இரு கூறுகளாக மேற்கூறிய முறையில் பிரிப்பது ஒரே வழியில்தான் இயலும் என்பது புலனாகிறது.

தேற்றம் 2. $\overline{a}$, $\overline{b}$ என்பன ஒரே கோட்டமைவிலா வெக்டர்கள் எனவும், $x\overline{a}+y\overline{b}=0$ எனவும் இருந்தால் $x=0$, $y=0$.

$x=0$ இல்லையெனில், $\overline{a}=-\frac{y\overline{b}}{x}$ எனக் கிடைக்கும். அதாவது $\overline{a}$ என்ற வெக்டர் $\overline{b}$யினைப் போல் $\left(-\frac{y}{x}\right)$ என்ற திசையிலி எண் மடங்கு என்றாகிறது. அப்படியானால் $\overline{a}$, $\overline{b}$யும் இணையான தாங்கும் கோடுகளையுடையன; அதாவது இரண்டும் ஒரே கோட்டமைவு உடையன என்றாகிறது. இது நாம் எடுத்துக் கொண்ட கொள்கைக்கு, $\overline{a}$, $\overline{b}$ என்பன ஒரே கோட்டமைவிலா வெக்டர்கள் என்பதற்கு முரண். எனவே $x=0$ இல்லையென்பது தவறு. $x=0$ ஆகத்தான் இருக்க வேண்டும் என்றாகிறது.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $y\overline{b}=0$ என்றாகிவிடும். ஆனால் $\overline{b}$ ஒரு பூச்சியமல்லாத வெக்டர்; எனவே yதான் பூச்சியமாகும். எனவே x, y இரண்டுமே பூச்சியமாக இருக்கும்.

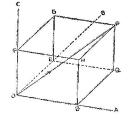
தேற்றம் 3. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்பன ஒரே தள அமைவில்லாதன எனவும் $x\overline{a}+y\overline{b}+z\overline{c}=0$ எனவும் இருந்தால், $x=0$; $y=0$; $z=0$; ஆகும்.

$x\neq 0$ என்க. அப்படியானால் $\overline{a}=-\frac{y}{x}\overline{b}-\frac{z}{x}\overline{c}$. அதாவது $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்பன ஒரே தள அமைவுடையன என்று பொருள்படுகிறது. இது எடுத்துக் கொண்ட கொள்கைக்கு முரண். எனவே $x\neq 0$ என்பது சரியன்று; $x=0$ என இருக்கவேண்டும் என்றாகிறது. $\therefore$ $y\overline{b}+z\overline{c}=0$ எனக் கிடைக்கும் முந்திய தேற்றப்படி $y=0$, $z=0$ எனவும் கிடைக்கும். இவ்வாறு தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

தேற்றம் 4. ஒரே தள அமைவிலா வெக்டர்கள் $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ கொடுக்கப்பட்டால், வேறெந்த வெக்டரையும் ஒரே ஒரு வழியில் $x\overline{a}+y\overline{b}+z\overline{c}$ என ஒருபடிச் சேர்க்கையாக எழுத இயலும். x, y, z என்பன தகுந்த திசையிலிகள். $\overline{OA}=\overline{a}$, $\overline{OB}=\overline{b}$, $\overline{OC}=\overline{c}$ என்பன ஒரே தள அமைவில்லாத வெக்டர்கள் என்க. $\overline{OP}$ என்பது வேறொரு வெக்டர். AOB, BOC, COA என்ற மூன்று சம தளங்கள் நிர்ணயிக்கப்படுகின்றன. அவற்றிற்கு இணையான சம தளங்கள் P வழியாக வரையப்படுகின்றன. அவை OAயை Dயிலும், OBயை Eயிலும் OCயை Fஇலும் வெட்டு கின்றன என்க. முதல் மூன்று தளங்களும் பின்னர் வரைந்த மூன்று தளங்களும் சேர்ந்து ஒரு கன இணைகரத் திண்மத்தினை (Parallelopiped) உருவாக்கும். அவ்விணைகரத் திண்மத்தின் ஒரு மூலை விட்டம் OPயாகும்.

$$\text{இனி } \overline{OP}=\overline{OD}+\overline{DQ}+\overline{QP}$$
$$=\overline{OD}+\overline{OE}+\overline{OF}.$$

ஆனால் $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, $\overline{OF}$ என்பன முறையே $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ என்ற வெக்டர்களின் கோட்டில் அமைவதால், x, y, z என மூன்று திசையிலி எண்கள் $\overline{OD}=x\overline{a}$, $\overline{OE}=y\overline{b}$, $\overline{OF}=z\overline{c}$ எனுமாறு காண இயலும்.



படம் 10.

$$\therefore \quad \overline{OP}=x\overline{a}+y\overline{b}+z\overline{c}.$$

இனி, இவ்வாறு ஒரு வெக்டரை மூன்று பிரிவுகளாகப் பிரித்து எழுதுதல், ஒரே ஒரு வழியில்தான் இயலும் என்பதை நிறுவுவோம்.

இயலுமானால் z_1, y_1, z_1 என வேறு மூன்று எண்கள் $\overline{OP}=x_1\overline{a}+y_1\overline{b}+z_1\overline{c}$ எனுமாறு காண முடிகிறது என்க. $\therefore \overline{OP}=x\overline{a}+y\overline{b}+z\overline{c}=x_1\overline{a}+y_1\overline{b}+z_1\overline{c}$.

$$\therefore \quad (x-x_1)\,\overline{a}+(y-y_1)\,\overline{b}+(z-z_1)\,\overline{c}=0.$$

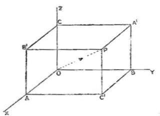
$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ ஒரே தள அமைவில்லாதன ஆகையால், $x-x_1=0$, $y-y_1=0$, $z-z_1=0$ என இருக்கவேண்டும். அதாவது $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$. அதாவது ஒரே ஒரு வழியில்தான் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக எழுத இயலும்.

§ 1·07. ஓரலகு வெக்டர்கள் i, j, k.

ஒரு வெக்டரை, ஒரே தள அமைவில்லாத வெக்டர்கள் மூன்றின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாய் எழுத இயலும் எனக் கண்டோம். அவ்வாறு கூறுகளாகப் பிரிக்க எடுத்துக்கொள்ளும் ஒரே தள அமைவில்லாத மூன்று வெக்டர்களை, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாய் அமைந்த மூன்று நேர்கோடுகளில் எடுத்துக் கொள்ளலாம். அவற்றையும் ஓரலகு வெக்டர்களாக எடுத்துக் கொண்டால் இன்னும் சிறப்பாக அமையும்.

படம் 11ல் OX, OY, OZ என்பவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று கோடுகள். OX வழியே iயும், OY வழியே jயும், OZ வழியே kயும் ஓரலகு வெக்டர்கள் என்க.

$\overline{OP}$ என்பது வேறு ஏதோ ஒரு வெக்டர். Pயின் வழியே YOZ, ZOX, XOY தளங்களுக்கு இணையாக வரையப்படும் சமதளங்கள் OX, OY, OZகளை முறையே A, B, Cயில் வெட்டட்டும். அப்படியானால், OA, OB, OC என்பன OX, OY, OZகளை ஆயங்களாகக் கொண்டு



படம் 11.

Pயின் மூவளவை ஆயத்தொலைகளாகும். Pயின் ஆயத்தொலைகள் (x, y, z) எனில்,

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AC'} + \overline{C'P}$$
$$= \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$$
$$= xi + yj + zk \text{ ஆகும்.}$$

மேலும் $OP^2 = OA^2 + AP^2$

$$= OA^2 + AC'^2 + C'P^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2.$$

$OP = r$ எனக் கொண்டால் $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

அதாவது $|\overline{OP}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

மேலும் OP யானது OX, OY, OZ உடன் முறையே α, β, γ எனும் கோணங்களை உருவாக்கினால், $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\cos\beta = \frac{y}{r}$, $\cos\gamma = \frac{z}{r}$ $\therefore x = r\cos\alpha,\ y = r\cos\beta,\ z = r\cos\gamma$.

$$\therefore \overline{OP} = xi + yj + zk.$$
$$= r(\cos\alpha\, i + \cos\beta\, j + \cos\gamma\, k)$$

$\overline{OP}$யின் திசையில் அமைந்த ஓரலகு வெக்டர்

$$= \frac{\overline{OP}}{r} = i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma \text{ ஆகும்.}$$

இதன் எண்ணளவு $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)^{1/2} = 1$.

i.e. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ என்பவை அந்த நேர்கோடு OPயின் திசைக் கொசைன்கள் எனப்படும். அவற்றிற்கிடையே உள்ள முக்கியமான தொடர்பே மேலே காட்டப்பட்டுள்ளது.

குறிப்பு: (1) (x, y, z) எனும் ஆயத் தொலைகள் கொண்ட புள்ளியை ஆய ஆதிக்கு இணைக்கும் நேர்கோட்டினால் குறிக்கப்படும் வெக்டர் $xi+yj+zk$ ஆகும்.

(2) P_1, P_2, P_3,.....என்ற புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் (x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2); (x_3, y_3, z_3);.....எனக் கொண்டால்,

$$\overline{OP_1} = \overline{r_1} = x_1i+y_1j+z_1k\,;$$
$$\overline{OP_2} = \overline{r_2} = x_2i+y_2j+z_2k\,;$$
$$\overline{OP_3} = \overline{r_3} = x_3i+y_3j+z_3k\,;$$

....

....

என்றாகும். எனவே கூட்டினால்,

$(\overline{r_1}+\overline{r_2}+\overline{r_3}+.....) = (\Sigma x_r)i+(\Sigma y_r)j+(\Sigma z_r)k$ எனக் கிடைக்கும். அதாவது பல வெக்டர்களின் இணைவாக்க விளைவான வெக்டர், ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று திசைகளில் அவ் வெக்டர்களின் கூறுகளின் இணைவாக்க விளைவு வெக்டராகும் எனத் தெரிகிறது. இதனின்றும் ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் பல வெக்டர்களின் இணைவாக்க விளைவான கூறு, அத்திசையில் அவ்வெக்டர்களின் கூறுகளின் இணைவாக்க விளைவாகும் என்பதும் பெறப்படுகிறது.

(3) ஒரு குறிப்பிட்ட திசையில் அமையும் ஓரலகு வெக்டர், அத்திசையின் திசைக் கொசைன்களால் i, j, kகளைப் பெருக்கிக் கூட்டிய வெக்டராகும்.

(4) i, j, k என்ற இந்த மூன்று ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான வெக்டர்களை 'குத்துமும்மை வெக்டர்கள்' (Ortho normal triad) என்கிறோம்.

படம் 12ல் காட்டியவாறு $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ என்பன ஏதோ இருபுள்ளிகள் என்க. அவற்றின் நிலை வெக்டர்கள் $\overline{r_1}$, $\overline{r_2}$ என்க.

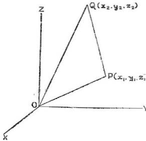
அப்படியானால் $\overline{OP} = \overline{r_1} = x_1i+y_1j+z_1k\,;$

$\overline{OQ} = \overline{r_2} = x_2i+y_2j+z_2k.$

ஆனால் $\overline{OP} + \overline{PQ} = \overline{OQ}$. (கூட்டல் விதிப்படி)

அதாவது $\overline{r_1}+\overline{PQ}=\overline{r_2}$.

$\therefore\ \overline{PQ}=\overline{r_2}-\overline{r_1}$.



படம் 12.

அதாவது $\overline{r_2}-\overline{r_1}=(x_2-x_1)i+(y_2-y_1)j+(z_2-z_1)k$ என்றாகிறது. இதனின்றும் ஒருவெக்டரிலிருந்து வேறொரு வெக்டரைக் கழிப்பதற்கான வழி பெறப்படுகிறது. அதாவது இரு வெக்டர்களையும் குத்து மும்மை வெக்டர்களின் சேர்க்கையாக எழுதினால், அந்தந்த இன வெக்டரிலிருந்து அந்தந்த இன வெக்டர் பகுதியைக் கழிக்க வேண்டும் என்பது இதிலிருந்து பெறப்படுகிறது.

மேலும் $PQ = |\overline{PQ}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ என வெக்டரின் எண்ணளவு எழுதும் முறையிலிருந்து பெறப்படுகிறது. இது மூவளவை ஆயத் தொலை வடிவகணிதத்தில் $(x_1\, y_1\, z_1)$ $(x_2\, y_2\, z_2)$ என இருபுள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட தொலைவைக் காணும் வாய்பாடாகும் என்பது தெரிந்ததே!

முந்திய பிரிவில் $|\overline{OP}| = r$ எனக்கொண்டு $\overline{OP} = r\,(i \cos \alpha + j \cos \beta + k \cos \gamma)$ எனத் திசைக் கொசைன்கள் $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$வில் எழுதினோம். Pயின் ஆயத் தொலைகள் (xyz) எனில் அதே $\overline{OP}=xi+yj+zk$ என்றும் காட்டினோம். எனவே இரண்டிலிருந்தும் $\frac{x}{r} = \cos \alpha$, $\frac{y}{r} = \cos \beta$, $\frac{z}{r} = \cos \gamma$ என, திசைக் கொசைன்களைக் கணக்கிட ஒரு வழி கிடைக்கிறது. அதேபோன்று PQவின் திசைக் கொசைன்களையும் எழுதலாம். $\cos \alpha = \frac{x_2-x_1}{|\overline{PQ}|}$, $\cos \beta = \frac{y_2-y_1}{|\overline{PQ}|}$, $\cos \gamma = \frac{z_2-z_1}{|\overline{PQ}|}$,

எனக் கிடைக்கும். இதில் $|\overline{PQ}| = \{\Sigma(x_2-x_1)^2\}^{1/2}$ ஆகும். இதுவும் மூவளவை ஆயத் தொலை வடிவ கணிதத்தில் வரும் வாய்பாடாகும்.

§ 1·08. நிலை வெக்டர் (Position Vector)

ஒரு புள்ளியின் நிலையை ஏதேனும் ஓர் ஆதியைப் பொறுத்துச் சுட்டிக் காட்டும் வெக்டர் அப்புள்ளியின் நிலைவெக்டர் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக P எனும் ஒரு புள்ளியின் நிலை வெக்டர், O எனும் ஆதியைப் பொறுத்து $\overline{OP}$யாகும். (படம் 12). ஆதியை எடுத்துக் கொள்வது நம் விருப்புக்கு விடப்பட்டுள்ளதால், ஒரே புள்ளிக்கு, வெவ்வேறு ஆதிகளைப் பொறுத்து வேறுபட்ட நிலை வெக்டர்கள் கிடைக்கும். எனவே கணக்குகளில் சிக்கல்களை விடுவிக்க வசதியான ஆதியை எடுத்துக்கொண்டு ஆராயலாம்.

'எந்த ஒரு வெக்டரையும் அதன் ஆரம்ப, முடிவுப் புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் வருமாறு எழுத இயலும்.'

படம் 12-ல் $\overline{OP} = \overline{r_1}$; $\overline{OQ} = \overline{r_2}$ என்பன முறையே P, Qவின் நிலைவெக்டர்களாகும்.

$$\overline{OP}+\overline{PQ} = \overline{OQ} \text{ ஆகையால்,}$$
$$\overline{PQ} = \overline{OQ}-\overline{OP}$$
$$= \overline{r_2}-\overline{r_1}$$

அதாவது $\overline{PQ}$ = Qவின் நிலைவெக்டர் $-P$யின் நிலைவெக்டர். இவ்வாறு ஒரு வெக்டரை அதன் ஆரம்ப, முடிவுப் புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்களை இணைத்து எழுதமுடியும்.

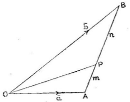
§ 1·09. இருபுள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் நிலைவெக்டர்கள் காணல்

A, B என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை P என்ற புள்ளி, $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{m}{n}$ எனும் விகிதத்தில் பிரிப்பதாய்க் கொள்வோம். O எனும் ஆதியைப் பொறுத்து, A, Bயின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\overline{a}$, $\overline{b}$ என்க.

அப்படியானால், $\overline{OA}+\overline{AB} = \overline{OB}$;

i.e. $\overline{a}+\overline{AB} = \overline{b}$;

i.e. $\overline{AB} = \overline{b}-\overline{a}$



படம் 13.

ஆனால் $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{m}{n}$; i.e. $\dfrac{AP}{AP+PB} = \dfrac{m}{m+n}$;

$$\therefore\ AP = \left(\frac{m}{m+n}\right) AB$$

$$\therefore\ \overline{AP} = \left(\frac{m}{m+n}\right) \overline{AB} = \left(\frac{m}{m+n}\right)(\overline{b}-\overline{a})$$

$$\therefore\ \overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$$

$$= \overline{a} + \frac{m}{m+n}(\overline{b}-\overline{a})$$

$$= \frac{(m+n)\overline{a} + m(\overline{b}-\overline{a})}{(m+n)}$$

$$= \frac{m\overline{b}+n\overline{a}}{m+n}$$

எனவே Pயின் நிலைவெக்டர் $\overline{OP} = \dfrac{m\overline{b}+n\overline{a}}{m+n}$ ஆகும்.

துணைமுடிவு: ABயின் நடுப்புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $\dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$ ஆகும்.

§ 1·10. மூன்று புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையத் தேவையானதும், போதுமானதுமான நியதி

ஒரே ஆரம்பப் புள்ளிகொண்ட மூன்று வெக்டர்கள் $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ ஆகிய வற்றின் முடிவுப் புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைய, தேவையான தும் போதுமானதுமான நியதி யென்னவெனில், l, m, n என்ற மூன்று

மெய்யெண்கள் $l\bar{a}+m\bar{b}+n\bar{c}=0$ எனுமாறும், $l+m+n=0$ எனுமாறும் இருக்கும்படிக் காண இயலுதல் வேண்டும்.

O என்னும் ஆதியைப் பொறுத்து ஒரே நேர்கோட்டிலுள்ள A, B, C எனும் மூன்று புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ என்க. மூன்றும் தனித்தனிப் புள்ளிகளாகையால், ABயை C ஏதேனும் ஒரு விகிதத்தில் பிரிக்கும். அவ்விகிதம் $m : l$ என்க.

$$\therefore\ C\text{யின் நிலைவெக்டர்}=\bar{c}=\frac{l\bar{a}+m\bar{b}}{l+m}$$

$$\therefore\ l\bar{a}+m\bar{b}-(l+m)\,\bar{c}=0.$$

$-(l+m)$ஐ n எனும் எழுத்தால் குறித்தால்,

$$l\bar{a}+m\bar{b}+n\bar{c}=0 \text{ என்றாகும்.}$$

மேலும் $l+m+n=l+m-l-m=0$ ஆகும். இவ்வாறு இந்நியதி தேவையானது என்பது காட்டப்பெற்றது. இனி இந்நியதி போதும் என்பதை நிறுவலாம். அதாவது ஏதோ மூன்று புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, என்பன $l\bar{a}+m\bar{b}+n\bar{c}=0$; $l+m+n=0$; என்ற நியதிக்குட்பட்டு அமைகின்றன. அப்படியானால் அப்புள்ளிகள் மூன்றும் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையும் எனக் காட்டவேண்டும்.

$$l+m+n=0\,; \qquad \therefore\ l=-(m+n)$$

மேலும் $l\bar{a}+m\bar{b}+n\bar{c}=0 \qquad \therefore\ l\bar{a}=-(m\bar{b}+n\bar{c})$

$$\therefore\ \frac{l\bar{a}}{l}=\frac{-(m\bar{b}+n\bar{c})}{-(m+n)}$$

$$\text{i.e. } \bar{a}=\frac{m\bar{b}+n\bar{c}}{m+n}$$

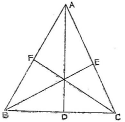
அதாவது BCயை A, $n : m$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. எனவே, A, B, C என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைகின்றன என்பது பெறப்படுகிறது.

இதுகாறும் நாம் கண்ட வரையறைகளையும் முடிவுகளையும்கொண்டு வடிவகணிதக் கணக்குகள் சிலவற்றைச் செய்து காட்டுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: ABC என்ற முக்கோணத்தில், D, E, F என்பன முறையே BC, CA, ABயின் நடுப்புள்ளிகள். அப்படி யானால் $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ என்ற வெக்டர்களை $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ என்ற வெக்டர்கள் வருமாறு கண்டுபிடி.

(i) $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$

$$\therefore\ \overline{BC}=\overline{AC}-\overline{AB} \qquad \ldots\ldots (1)$$



படம் 14.

(ii) $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$

$= \overline{AB} + \frac{\overline{BC}}{2}$ ($\because$ D, BCயின் நடுப்புள்ளி)

$= \overline{AB} + \frac{\overline{AC} - \overline{AB}}{2}$ (1லிருந்து)

$= \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2}$ ...... (2)

(iii) $\overline{AB} + \overline{BE} = \overline{AE}$;

$\therefore \overline{BE} = \overline{AE} - \overline{AB}$

$= \frac{\overline{AC}}{2} - \overline{AB}$

$= \frac{\overline{AC} - 2\overline{AB}}{2}$

(iv) $\overline{AC} + \overline{CF} = \overline{AF}$;

$\therefore \overline{CF} = \overline{AF} - \overline{AC}$

$= \frac{\overline{AB}}{2} - \overline{AC} = \frac{\overline{AB} - 2\overline{AC}}{2}$

எடுத்துக்காட்டு 2 : ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகளிலிருந்து எதிர்ப்பக்கங்களை நோக்கி வரையப்படும் நடுக்கோடுகளினுல் குறிக்கப் பெறும் வெக்டர்களின் கூட்டல் பூச்சியம் என நிறுவுக.

$\triangle ABC$யில், BCயின் நடுப்புள்ளி D, CAயின் நடுப்புள்ளி E, ABயின் நடுப்புள்ளி F என்க. (படம் 14ஐக் காண்க.)

$\therefore\ \overline{AB}+\overline{AC} = 2\overline{AD}$

இதேபோல் $\overline{BC}+\overline{BA} = 2\overline{BE}$

$\overline{CA}+\overline{CB} = 2\overline{CF}$

கூட்டினால் $\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{BA}+\overline{CA}+\overline{CB} = 2\,(\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF})$

i.e. $0 = 2\,(\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF})$

$\therefore\ \overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF} = 0.$

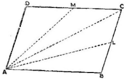
எடுத்துக்காட்டு 3 : $ABCD$ ஓர் இணைகரம். L, M என்பன BC, CDயின் நடுப்புள்ளிகள். $\overline{AL}$, $\overline{AM}$ என்பவற்றின் மதிப்புகளை $\overline{AB}$, $\overline{AD}$யில் காண்க. மேலும் $\overline{AL}+\overline{AM}=\frac{3}{2}\,\overline{AC}$ என்று நிறுவுக.

இணைகரம் $ABCD$யில், BCயின் நடுப்புள்ளி L.

$$\therefore\ \overline{AL} = \overline{AB}+\overline{BL}$$

$$= \overline{AB}+\frac{\overline{AD}}{2}$$

$$\left(\because\ BL \parallel AD\ \&\ = \frac{AD}{2}\right)$$



படம் 15.

$$\overline{AM} = \overline{AD}+\overline{DM}$$

$$= \overline{AD}+\frac{\overline{DC}}{2} \quad (\because\ M,\ DC\text{யின் நடுப்புள்ளி})$$

$$= \overline{AD}+\frac{\overline{AB}}{2}$$

$$\therefore\ \overline{AL}+\overline{AM} = \overline{AB}+\frac{\overline{AD}}{2}+\overline{AD}+\frac{\overline{AB}}{2}$$

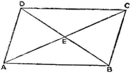
$$= \tfrac{3}{2}\,\overline{AB}+\tfrac{3}{2}\,\overline{AD}$$

$$= \tfrac{3}{2}\,(\overline{AB}+\overline{AD})$$

$$= \tfrac{3}{2}\,(\overline{AB}+\overline{BC})$$

$$= \tfrac{3}{2}\,\overline{AC}.$$

எடுத்துக்காட்டு 4: ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமபாகமாய் வெட்டும் என நிறுவுக.



படம் 16.

$ABCD$ என்பது ஓர் இணைகரம். Aயினை ஆதியாய்க் கொண்டு Bயின் நிலைவெக்டர் $\overline{AB} = \overline{a}$ எனவும் Dயின் நிலை வெக்டர் $\overline{b}$ எனவும் கொள்க. $\therefore \overline{BC} = \overline{b}$., மேலும் Cயின் நிலை வெக்டர் $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{a} + \overline{b}$. மூலை விட்டங்கள் ஒன்றை யொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி E என்க.

$$AC\text{யின் நடுப்புள்ளியின் நிலை வெக்டர்} = \frac{\overline{a} + \overline{b}}{2}.$$

$$BD\text{யின் நடுப்புள்ளியின் நிலை வெக்டர்} = \frac{\overline{AB} + \overline{AD}}{2}$$

$$= \frac{\overline{a} + \overline{b}}{2}.$$

இவ்வாறு ACயின் நடுப்புள்ளியும், BDயின் நடுப்புள்ளியும் ஒன்று கும். எனவே அதுவே வெட்டும் புள்ளி E யாகும். அதாவது மூலை விட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமபாகமாக வெட்டும்.

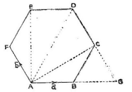
எடுத்துக்காட்டு 5: $ABCDEF$ எனும் ஓர் ஒழுங்கு அறு கோணத்தின் இரு அண்டைப்பக்கங்கள் $\overline{a}$, $\overline{b}$ என்ற வெக்டர்களைக் குறித்தால், $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ $\cdot$ $\overline{EF}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, & $\overline{CE}$ எனும் வெக்டர்களைக் கணக்கிடு.

(பி. எஸ். சி. துணைப்பாடம் ஏப். 65)

ஒழுங்கு அறுகோணம் $ABCDEF$ல் $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AF} = \overline{b}$ என்க. $CD \parallel AF$ & $= EF$ என்பதால்,

$$\overline{CD} = \overline{AF}$$

$$= \overline{b} \text{ ஆகும்.}$$



படம் 17.

$\overline{DE}$, $\overline{AB}$க்கு எதிர்த்திசையில், ஆனால் எண் அளவு $\overline{AB}$க்குச் சமமாய் உள்ளது. $\therefore \overline{DE} = -\overline{a}$.

ABயையும் DCயையும் நீட்டுக. அவை Gயில் வெட்டட்டும். ΔBGC ஒரு சமபக்க முக்கோணமாகும். ஏனெனில் $A\hat{B}C = B\hat{C}D = 120°$.

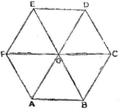
$$\therefore \overline{BG} = \overline{AB} = \overline{a};$$
$$\overline{GC} = \overline{CD} = \overline{b};$$
$$\therefore \overline{BC} = \overline{BG} + \overline{GC}$$
$$= \overline{a} + \overline{b}.$$

$\overline{EF}$, $\overline{BC}$க்கு எதிர்த்திசையும், $\overline{BC}$யின் எண் அளவும் கொண்டது. $\therefore \overline{EF} = -(\overline{a}+\overline{b})$.

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{a} + (\overline{a}+\overline{b}) = 2\overline{a} + \overline{b};$$
$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{a} + (\overline{a}+\overline{b}) + \overline{b} = 2\overline{a} + 2\overline{b};$$
$$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{a} + (\overline{a}+\overline{b}) + \overline{b} + (-\overline{a})$$
$$= \overline{a} + 2\,\overline{b}.,$$
$$\overline{CE} = \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{b} - \overline{a}.$$

எடுத்துக்காட்டு 6 : $ABCDEF$ என்ற ஒழுங்கு அறுகோணத்தில், O என்பது அறுகோண மையம் எனில், $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE} + \overline{AF} = 6\,\overline{AO}$ என நிறுவுக.

ஒழுங்கு அறுகோணம் $ABCDEF$ன் மையம் O, AD, BE, CF ஆகியவற்றின் வெட்டும் புள்ளியாகவும், அவற்றின் நடுப்புள்ளியாகவும் இருக்கும்.



படம் 18.

எனவே $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}$. $\quad \overline{AE} = \overline{AO} + \overline{OE}$

$\overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC} \quad \overline{AF} = \overline{AO} + \overline{OF}$

$\overline{AD} = \overline{AO} + \overline{OD}$

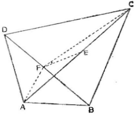
கூட்டினுல் $\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}+\overline{AE}+\overline{AF} = 5\overline{AO}+(\overline{OB}+\overline{OE}) + (\overline{OC}+\overline{OF})+(\overline{OD})$

$= 6\,\overline{AO} + (\overline{OD} - \overline{AO})$

$= 6\,\overline{AO}$.

அடைப்புக்களில் உள்ள வெக்டர்கள் எதிர்த்திசையில் அமைந்த ஆனல் எண்ணளவு சமமான வெக்டர்கள். எனவே அக்கூட்டல்கள் பூச்சிய மாகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 7: $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தில் AC, BDயின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே E, F எனில் வெக்டர் கூட்டல் $\overline{AB}+\overline{CB}+\overline{CD}+\overline{AD} = 4\,\overline{EF}$ என நிறுவுக. (து. பா. ஏப். 65)



படம் 19.

$ABCD$ ஒரு நாற்கரம். ACயின் நடுப்புள்ளி E. BDயின் நடுப்புள்ளி F. AF, CF, EF களைச் சேர்க்கவும். இனி, BD யின் நடுப்புள்ளி F ஆகையால்,

$$\overline{AB} + \overline{AD} = 2\,\overline{AF}\cdot$$

அதேபோல், $\overline{CB} + \overline{CD} = 2\,\overline{CF}\cdot$

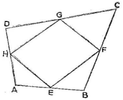
$\therefore$ கூட்டிஞல் $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CB} + \overline{CD} = 2\,(\overline{AF} + \overline{CF})$

ACயின் நடுப்புள்ளி E ஆதலால்,

$$\overline{AF} + \overline{CF} = 2\,\overline{EF}\cdot$$

$$\therefore\ \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{CB} + \overline{CD} = 2\,(2\,\overline{EF}) = 4\,\overline{EF}.$$

எடுத்துக்காட்டு 8: ஒரு நாற்கரத்தின் அடுத்தடுத்த பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை இணைத்தால் ஓர் இணைகரம் உருவாகும் என நிறுவுக.



படம் 20.

நாற்கரம் $ABCD$யில், AB, BC, CD, DAயின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே E, F, G, H என்க. ஏதேனும் ஓர் ஆதியைப் பொறுத்து, A, B, C, Dயின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ என்க. எனவே,

Eயின் நிலை வெக்டர் $\dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$,

Fன் நிலைவெக்டர் $\dfrac{\overline{b}+\overline{c}}{2}$,

G ,, ,, $\dfrac{\overline{c}+\overline{d}}{2}$,

H ,, ,, $\dfrac{\overline{d}+\overline{a}}{2}$.

$\therefore \overline{EP} = F$ன் நிலை வெக்டர் $-$ Eன் நிலை வெக்டர்.

$$= \frac{\overline{b}+\overline{c}}{2} - \frac{\overline{a}+\overline{b}}{2} = \frac{\overline{c}-\overline{a}}{2};$$

வெக்டர் $\overline{HG} = G$யின் நிலை வெக்டர் $-$ Hன் நிலை வெக்டர்

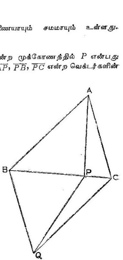
$$= \frac{\overline{c}+\overline{d}}{2} - \frac{\overline{a}+\overline{d}}{2}$$

$$= \frac{\overline{c}-\overline{a}}{2}$$

$$\therefore \overline{EF} = \overline{HG}.$$

அதாவது EF, HGக்கு இணையாயும் சமமாயும் உள்ளது. $\therefore EFGH$ ஓர் இணைகரம்.

எடுத்துக்காட்டு 9: ABC என்ற முக்கோணத்தில் P என்பது BCயில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. $\overline{AP}, \overline{PB}, \overline{PC}$ என்ற வெக்டர்களின் இணைவாக்க விளைவு $\overline{PQ}$ எனில், $ABQC$ ஓர் இணைகரம் எனவும், Pயின் எல்லா நிலைகளுக்கும் தக, Q ஒரு நிலையான புள்ளியாய் விளங்கும் எனவும் நிறுக.



படம் 21.

$\triangle ABC$யில், P என்பது BCயின் மீதுள்ள ஏதோ ஒரு புள்ளி. $\overline{AP}, \overline{PB}, \overline{PC}$ எனும் வெக்டர்களின் இணைவாக்க விளைவு வெக்டர் $\overline{PQ}$ ஆகும். CQ, BQ களைச் சேர்க்க. $ABQC$ எனும் வடிவம் ஓர் இணைகரம் என நிறுவ வேண்டும்.

$\overline{AP} + \overline{PB} + \overline{PC} = \overline{PQ}$
(கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

i. e. $\overline{AB} + \overline{PC} = \overline{PQ}$

ஆனால் $\overline{PC} + \overline{CQ} = \overline{PQ}$

எனவே $\overline{AB} = \overline{CQ}$ என்றாகிறது.

எனவே $ABQC$ ஓர் இணைகரம்.

மேலும், $\overline{AQ} = \overline{AC} + \overline{CQ}$

$= \overline{AC} + \overline{AB}$

$\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ஆகியன கொடுக்கப்பட்டுவிட்டமையால் நிலை மதிப்புகள். எனவே $\overline{AQ}$ ஒரு நிலை மதிப்பு. எனவே Q வின் நிலை, Pயின் எந்த நிலைக்கும் மாறுது அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 10 : P, Q எனும் புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $i+3j-7k$, $5i-2j+4k$ எனில், $\overline{PQ}$வைக் காண்க. அதன் எண்ணளவு, திசைக்கொசைன்கள் முதலியவற்றையும் காண்க.

$$\overline{PQ} = Q\text{வின் நிலைவெக்டர்} - P\text{யின் நிலைவெக்டர்.}$$
$$= 5i-2j+4k-(i+3j-7k)$$
$$= 4i-5j+11k$$

$\therefore$ எண்ணளவு $= |\overline{PQ}| = \sqrt{4^2+(-5)^2+11^2}$
$$= \sqrt{162} = 9\sqrt{2}.$$

PQவின் திசைக்கொசைன்கள் $\dfrac{4}{9\sqrt{2}}, \dfrac{-5}{9\sqrt{2}}, \dfrac{11}{9\sqrt{2}}$.

எடுத்துக்காட்டு 11 : P, Q, R, S என்ற புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $i+j+k$, $2i+5j$, $3i+2j-3k$, $i-6j-k$ எனில் $PQ \parallel RS$ என நிறுவி, அந்நீளங்களின் விகிதம் என்னவெனக் காண்க.

$$\overline{PQ} = Q\text{வின் நிலைவெக்டர்} - P\text{யின் நிலைவெக்டர்}$$
$$= (2i+5j)-(i+j+k)$$
$$= i+4j-k$$
$$\overline{RS} = S\text{ன் நிலைவெக்டர்} - R\text{ன் நிலைவெக்டர்}$$
$$= (i-6j-k)-(3i+2j-3k)$$
$$= -2i-8j+2k$$

$\therefore$ $\overline{RS} = -2\,\overline{PQ}$ என்பது வெளிப்படை.

எனவே RS, PQக்கு இணை.

மேலும் $|\overline{PQ}| = \sqrt{1^2+4^2+(-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$|\overline{RS}| = \sqrt{(-2)^2+(-8)^2+2^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$\therefore$ $PQ : RS = 3\sqrt{2} : 6\sqrt{2}$

$= 1 : 2$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 12 : $\triangle ABC$யின் சுற்று வட்டமையம் O எனவும், குத்துக்கோட்டுச் சந்தி O' எனவும் இருந்தால், (i) $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OO'}$ எனவும், (ii) $\overline{O'A}+\overline{O'B}+\overline{O'C}=2\overline{O'O}$ எனவும் நிறுவுக.

முக்கோணம் ABCயில், BCயின் நடுப்புள்ளி D எனவும், Aயிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடி P எனவும் கொள்க. O எனும் சுற்றுவட்ட மையம், BCயின் நடுக்குத்துக் கோட்டின்மேலும், O' எனும் குத்துக்கோட்டுச் சந்தி, APயின் மேலும் அமைகின்றன. மேலும் $AO' = 2\ OD$ என வடிவ கணிதத் தேற்றத்திலிருந்து கிடைக்கப்பெறுகிறது.

$$\therefore\ \overline{OA'} = 2\overline{OD}$$

இனி, $\overline{OB} + \overline{OC} = 2\overline{OD}$ எனத் தெரியும்.

($\because$ BCயின் நடுப்புள்ளி D)

$$\therefore\ \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OA} + 2\overline{OD}$$

$$= \overline{OA} + \overline{AO'}$$

$$= \overline{OO'} \qquad \ldots\ldots(1)$$

மேலும் $\overline{O'A} = \overline{O'O} + \overline{OA}$;

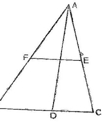
$$\overline{O'B} = \overline{O'O} + \overline{OB},\ \overline{O'C} = \overline{O'O} + \overline{OC}$$

$$\therefore\ \overline{O'A} + \overline{O'B} + \overline{O'C} = 3\overline{O'O} + \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$$

$= 3\overline{O'O} + \overline{OO'}$ (∵ (1)ல் இருந்து)

$$= 2\overline{O'O}$$

எடுத்துக்காட்டு 13: ΔABCயில் D, E, F என்பன முறையே BC, CA, ABயின் நடுப்புள்ளிகள் எனில், (i) $\overline{FE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$; (ii) $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = 0$. (iii) மூன்று நடுக்கோடுகளுக்கும் ஒரு பொது முச்சமக்கூறிடும் புள்ளி (Point of trisection) உண்டு என நிறுவுக.



படம் 22.

ஏதேனும் ஓர் ஆதியைப் பொறுத்து A, B, Cயின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்க. D, E, F என்பன முறையே BC, CA, AB ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகள். அவற்றின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}$, $\frac{\overline{c}+\overline{a}}{2}$, $\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$ ஆகும்.

$$\overline{FE} = E\text{யின் நிலைவெக்டர்} - F\text{ன் நிலைவெக்டர்}$$

$$= \frac{\overline{a}+\overline{c}}{2} - \frac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$$

$$= \frac{\overline{c}-\overline{b}}{2}$$

$$\overline{BC} = \overline{c} - \overline{b} \quad \therefore \ \overline{FE} = \tfrac{1}{2}\overline{BC}$$

$$\overline{AD} = D\text{யின் நிலைவெக்டர்} - A\text{யின் நிலைவெக்டர்}$$

$$= \frac{\overline{b}+\overline{c}}{2} - \overline{a}$$

இதேபோன்று $\overline{BE} = \dfrac{\overline{c}+\overline{a}}{2} - \overline{b}$; $\overline{CF} = \dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2} - \overline{c}$.

$$\therefore \ \overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \left(\frac{\overline{b}+\overline{c}}{2} - \overline{a}\right) + \left(\frac{\overline{c}+\overline{a}}{2} - \overline{b}\right) + \left(\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2} - \overline{c}\right)$$

$$= 0$$

ADயினை $AG : GD = 2 : 1$ எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் G எனும் புள்ளியின் நிலைவெக்டர்

$$= \frac{2\,(D\text{யின் நிலைவெக்டர்}) + 1\,(A\text{யின் நிலைவெக்டர்})}{2+1}$$

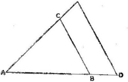
$$= \frac{2\left(\frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}\right) + \overline{a}}{2+1}$$

$$= \frac{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}}{3}.$$

இதேபோல் BE, CF என்ற நடுக்கோடுகளையும் $2 : 1$ எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் நிலைவெக்டரும் $\dfrac{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}}{3}$ என நிறுவலாம். அதாவது மூன்று நடுக்கோடுகளும் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கும். மேலும் அப்புள்ளி ஒவ்வொரு நடுக்கோட்டினையும் முச் சமக் கூறிடும் என்பதும் நிறுவப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 14 : இரண்டு முக்கோணங்களில் ஒன்றின் கோணங்கள் மற்றதின் கோணங்களுக்குச் சமமாயின், சமகோணங் களுக்கு எதிர்ப் பக்கங்கள் விகித சமத்திலிருக்கும் என நிறுவுக.

ABC, ADE என்பன இரு சமகோண முக்கோணங்கள் என்க. $\triangle ABC$யினின்றும் முற்றிலும் பிரிந்த நிலையில்கூட வேறொரு சமகோண முக்கோணம் எடுத்துக்கொள்ளலாம்; என்றாலும் வசதியை முன்னிட்டு ஒருமுனை பொதுவாகவும், ஒன்றின் இரு பக்கங்கள் மற்றதின் ஒத்த பக்கங்களின்மேல் பொருந்துமாறும் எடுத்துக்கொள்கிறோம். தனியாக முக்கோணங்கள் இருந்தாலும், அவற்றில் ஒன்றின் மேல் மற்ற முக்கோணத்திற்குச் சர்வ சமமான முக்கோணம் அமைத்தால் நாம் எடுத்துக் கொண்டதைப்போல் இரு முக்கோணங்கள் கிடைத்துவிடும்.



படம் 23.

பொது முனையினை ஆதியாய்க்கொண்டு B, Cயின் நிலைவெக்டர்கள் $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ முறையே $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்க. $\overline{BC} = \overline{c} - \overline{b}$;

AD, ABயுடன் ஒரேகோட்டில் அமைவதால் $\overline{AD} = m_1 \overline{AB}$. இதில் m_1 எனும் திசையிலி $\dfrac{AD}{AB}$ ஆகும். இதேபோல் $\overline{AE} = m_2 \overline{AC}$

$$m_2 = \frac{AE}{AC}$$

DE, BCக்கு இணை.

$$\therefore \quad \overline{DE} = m_3 \overline{BC} = m_3(\overline{c} - \overline{b})$$

வெக்டர் கூட்டல்படி $\overline{AD} + \overline{DE} + \overline{EA} = 0$

i.e. $\overline{AD} + \overline{DE} - \overline{AE} = 0$

i.e. $m_1\overline{b} + m_3(\overline{c} - \overline{b}) - m_2\overline{c} = 0$

i.e. $m_1\overline{b} - m_3\overline{b} + m_3\overline{c} - m_2\overline{c} = 0$

i.e. $\overline{b}(m_1 - m_3) + \overline{c}(m_3 - m_2) = 0$

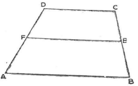
ஆனால் $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்பன ஒரே கோட்டமைவிலாவெக்டர்கள்.

$$\therefore \quad m_1 - m_3 = 0 \; ; \; m_3 - m_2 = 0$$

i.e. $m_1 = m_2 = m_3$

அதாவது $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BE}{BC}$

எடுத்துக்காட்டு 15 : ஒரு சரிவகத்தின் இணையான பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு இணையான பக்கங்களுக்கு இணையென்றும், அவற்றின் கூட்டலில் பாதி என்றும் நிறுவுக.



படம் 24.

$ABCD$ எனும் சரிவகத்தில், BC, ADயின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே E, F என்க. ஏதேனும் ஓர் ஆதியைப் பொறுத்து A, B, C, D களின் நிலைவெக்டர்கள் $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ எனில்,

$$E\text{யின் நிலைவெக்டர்} = \frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}$$

$$F\text{ன் நிலைவெக்டர்} = \frac{\overline{a}+\overline{d}}{2}$$

$$\therefore \; \overline{EF} = F\text{ன் நிலைவெக்டர்} - E\text{யின் நிலைவெக்டர்}$$

$$= \frac{\overline{a}+\overline{d}}{2} - \frac{\overline{b}+\overline{c}}{2} = \frac{(\overline{a}-\overline{b})+(\overline{d}-\overline{c})}{2}$$

சரிவகத்தில் $AB \parallel CD$

$$\therefore \; \overline{AB} = k\overline{DC}\,;\ k \text{ என்பது ஏதோ ஒரு தகுந்த எண்}$$

$$\text{i.e. } \overline{AB} = k(\overline{c}-\overline{d})$$

$$\text{i.e. } \overline{EF} = \frac{k(\overline{c}-\overline{d})-(\overline{c}-\overline{d})}{2} = \frac{(k-1)}{2}(\overline{c}-\overline{d})$$

$\frac{k-1}{2}$ என்பது ஒரு திசையிலி ஆகையால், $EF \parallel CD$ என்பது புலனாகிறது.

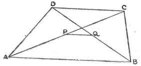
$$\text{மேலும் } \overline{EF} = \frac{(\overline{a}-\overline{b})+(\overline{d}-\overline{c})}{2}$$

$$= \frac{\overline{BA}+\overline{CD}}{2}$$

அதாவது, AB, CD ஆகிய இணைப்பக்கங்களின் கூட்டலில் பாதியாக EF இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 16 : ஒரு சரிவகத்தின் மூலைவிட்டங்களின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு, இணையான பக்கங்களுக்கு இணை

யாகவும், அவற்றின் வேறுபாட்டில் பாதியாகவும் இருக்கும் என நிறுவுக.



படம் 25.

$ABCD$ எனும் சரிவகத்தின் மூலைவிட்டங்களான AC, BD ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் P, Q என்பன.

ABயும் CDயும் இணைப்பக்கங்கள். ஏதேனும் ஓர் ஆதியைப் பொறுத்து, A, B, C, Dகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ என்க.

$AB \parallel DC$ என்பதால், $\overline{b}-\overline{a} = k\,(\overline{c}-\overline{d})$ எனுமாறு k என்ற எண் காண இயலும்.

ACயின் நடுப்புள்ளி Pயின் நிலைவெக்டர் $\dfrac{\overline{a}+\overline{c}}{2}$

BDயின் நடுப்புள்ளி Qவின் நிலைவெக்டர் $\dfrac{\overline{b}+\overline{d}}{2}$

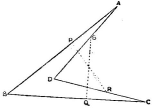
$$\overline{PQ} = Q\text{வின் நிலைவெக்டர்} - P\text{யின் நிலைவெக்டர்}$$
$$= \frac{\overline{b}+\overline{d}}{2} - \frac{\overline{a}+\overline{c}}{2}$$
$$= \frac{\overline{b}-\overline{a}}{2} - \frac{\overline{c}-\overline{d}}{2}$$
$$= \frac{\overline{AB}-\overline{DC}}{2}$$

$\therefore$ PQவின் நீளம் AB, DCகளின் வேறுபாட்டில் பாதி.

மேலும் $$\overline{PQ} = \frac{(\overline{b}-\overline{a})-(\overline{c}-\overline{d})}{2} = \frac{k\,(\overline{c}-\overline{d})-(\overline{c}-\overline{d})}{2}$$
$$= \frac{(k-1)\,(\overline{c}-\overline{d})}{2}$$

எனவே, $PQ \parallel DC$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 17 : ஒரே தளத்தில் அமையாத நான்கு நேர் கோடுகளால் உருவாக்கப்படும் ஒரு சமதளமிலா நாற்கரத்தின் (Skew quadrilateral) எதிர் விளிம்புகளின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடுகள் ஒன்றையொன்று இருசமபாகமாக்கும் என நிறுவுக.



படம் 26.

$ABCD$ என்பது சமதளமிலா நாற்கரம். P, Q, R, S என்பன முறையே AB, BC, CD, DAயின் நடுப்புள்ளிகள். ஏதேனும் ஓர் ஆதியைப்பொறுத்து A, B, C, Dயின் நிலைவெக்டர்கள் $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ என்றால், P, Q, R, Sயின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$, $\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}$, $\frac{\bar{c}+\bar{d}}{2}$, $\frac{\bar{d}+\bar{a}}{2}$ ஆகும்.

எனவே PRன் நடுப்புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $\dfrac{\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}+\frac{\bar{c}+\bar{d}}{2}}{2}$

$$= \frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}}{4}.$$

இதேபோல் QSன் நடுப்புள்ளியின் நிலைவெக்டர்

$$= \frac{\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}+\frac{\bar{d}+\bar{a}}{2}}{2} = \frac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}}{4}$$

எனவே PR, QS இரண்டும் ஒன்றையொன்று இருசமமாக வெட்டிக்கொள்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 18 : மூவளவை ஆயத் தொலைகள் (1, 2, 3) (2, 3, 1) (3, 1, 2) கொண்ட மூன்று புள்ளிகள் சமபக்க முக்கோணத்தை உருவாக்கும் என நிறுவுக.

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் A (1, 2, 3); B (2, 3, 1); C (3, 1, 2) என்க.

$\therefore$ Aயின் நிலைவெக்டர் $i+2j+3k$;

Bயின் நிலைவெக்டர் $2i+3j+k$;

Cயின் நிலைவெக்டர் $3i+j+2k$.

$$\therefore\ \overline{AB} = (2i+3j+k)-(i+2j+3k)$$
$$= i+j-2k.$$

இதேபோல் $\overline{BC} = i-2j+k$; $\overline{CA} = -2i+j+k$.

$$\therefore\ |\overline{AB}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6};\ |\overline{BC}| = \sqrt{6};\ |\overline{CA}| = \sqrt{6}$$

$\therefore$ $\Delta\ ABC$ ஒரு சமபக்க முக்கோணம்.

எடுத்துக்காட்டு 19 : $\overline{a}-2\overline{b}+3\overline{c}$, $2\overline{a}+3\overline{b}-4\overline{c}$, $-7\overline{b}+10\overline{c}$ என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர் கோட்டிலமையும் எனக் காண்பி.

இம்மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர் கோட்டில் அமையவேண்டு மானால் l, m, n என்ற மூன்று எண்கள்

$l\,(\overline{a}-2\overline{b}+3\overline{c}) + m\,(2\overline{a}+3\overline{b}-4\overline{c}) + n\,(-7\overline{b}+10\overline{c}) = 0$ எனும் படியும், $l+m+n = 0$ எனும்படியும் காண இயல வேண்டும். $l = 2$, $m = -1$, $n = -1$, எனில் இவ்விரண்டு சமன்பாடுகளும் நிறைவு செய்யப்படுகின்றன.

எனவே இம்மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 20 : $\overline{a}$, $\overline{b}$ என்பவை ஒரே நேர்கோட்டமை விலா இரு வெக்டர்கள் எனில், $l_1\overline{a}+m_1\overline{b}$, $l_2\overline{a}+m_2\overline{b}$, $l_3\overline{a}+m_3\overline{b}$, எனும் வெக்டர்கள் ஒரே நேர்கோட்டமைவுடையனவாயிருக்க $\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ என இருக்க வேண்டும் என நிறுவுக.

x, y, z என மூன்று எண்கள் $x+y+z=0$ எனவும், $x\,(l_1\overline{a}+m_1\overline{b}) + y\,(l_2\overline{a}+m_2\overline{b}) + z\,(l_3\overline{a}+m_3\overline{b}) = 0$ எனவும் இருக்கும்படியாகக் காண இயலுமானால் இம்மூன்று வெக்டர்களும் ஒரே நேர் கோட்டமைவுடையன வாகும்.

i.e. $a\,(l_1x+l_2y+l_3z)+\overline{b}\,(m_1x+m_2y+m_3z) = 0.$

$\overline{a}$யும் $\overline{b}$யும் ஒரே நேர் கோட்டமைவுடையன இல்லை.

$$\therefore\ l_1x+l_2y+l_3z = 0;$$
$$m_1x+m_2y+m_3z = 0;$$
$$\text{மேலும்}\ \ x+y+z = 0.$$

இம்மூன்றிலிருந்தும், x, y, zஐ நீக்கினல், அணிக் கோவை முறைப்படி $\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ எனக் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 21: $7j+10k$, $-i+6j+6k$, $-4i+9j+6k$, எனும் நிலைவெக்டர்கள் கொண்ட மூன்று புள்ளிகள் ஓர் இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தை உருவாக்கும் என நிறுவுக.

Aயின் நிலைவெக்டர் $7j+10k$;

Bயின் நிலைவெக்டர் $-i+6j+6k$;

Cயின் நிலைவெக்டர் $-4i+9j+6k$ என்க.

$\therefore\ \overline{AB} = -i-j-4k;\ \overline{BC} = -3i+3j,\ \overline{AC} = -4i+2j-4k.$

$\therefore\ |\overline{AB}| = \sqrt{1+1+16} = 3\sqrt{2};\ |\overline{BC}| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}.$

$|\overline{AC}| = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6.$

இவ்வாறு $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = 3\sqrt{2}$

மேலும் $|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 = |\overline{AC}|^2$

i.e. $(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 6^2$

$\therefore$ ABC ஓர் இருசமபக்க செங்கோண முக்கோணமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 22: $A\,(3, -2, 4)$; $B\,(1, 1, 1)$; $C\,(-1, 4, -2)$ எனும் புள்ளிகள் ஒரே நேர் கோட்டில் அமையும் என நிறுவுக.

Aயின் நிலைவெக்டர் $= 3i-2j+4k$;

Bயின் நிலைவெக்டர் $= i+j+k$;

Cயின் நிலைவெக்டர் $= -i+4j-2k$

$\therefore\ \overline{AB} = -2i+3j-3k;$

$\overline{BC} = -2i+3j-3k.$

எனவே $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ இரு சமமான வெக்டர்கள். முதல் வெக்டரின் முடிவுப் புள்ளி இரண்டாவதின் ஆரம்பப் புள்ளியாக அமைவதால், இவற்றின் தாங்கும் கோடுகள் ஒரே கோடாகும். அதாவது A, B, C ஒரே நேர் கோட்டிலமையும்.

§ 1·11. சராசரி மையம் (Centroid or Mean Centre)

ஏதோ ஓர் ஆதியைப் பொறுத்து $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ என்ற n புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \overline{P_3} \ldots \overline{P_n}$ எனில், $\overline{OG} = \dfrac{\overline{P_1}+\overline{P_2}+\cdots+\overline{P_n}}{n}$ எனும் நிலைவெக்டர் கொண்ட புள்ளி Gயை அப்புள்ளிகளின் சராசரி மையம் என்கிறோம்.

மேலும் $m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots m_n$, என்ற மெய்யெண்கள் மேற்கூறிய புள்ளிகளுடன் முறையே இணைக்கப்பட்டவையானால்,

$$\overline{OG} = \frac{m_1\overline{P_1}+m_2\overline{P_2}+m_3\overline{P_3}+\cdots\cdots+m_n\overline{P_n}}{m_1+m_2+\cdots+m_n} \text{ எனும்}$$

நிலைவெக்டர் கொண்ட புள்ளி G, அப்புள்ளிகளின் நிறையிட்ட சராசரி மையம் (Weighted mean centre or Centroid) எனப்படும்.

மேற்கண்ட வரையறையில் $m_1, m_2, \ldots\ldots m_n$ என்பன முறையே $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_n$ எனும் புள்ளிகளில் அமைந்த துகள்களின் (particles) பொருண்மைகள் (masses) என்றால், G என்ற நிறையிட்ட சராசரி மையம் 'பொருண்மை மையம்' (centre of mass) எனப்படும்.

m, n என்ற இரு இணைக்கப்பட்ட எண்களைக் கொண்ட இரு புள்ளிகள் A, Bயின் சராசரி மையம் G யானது $\overline{OG} = \dfrac{m\overline{a}+n\overline{b}}{m+n}$ எனும் வெக்டரால் குறிக்கப் பெறும். இது ABயை $n : m$ எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கிறது என்பது வெளிப்படை.

தேற்றம் 1: *சராசரி மையத்தின் நிலை, வெக்டர்களைக் குறிக்க எடுத்துக் கொள்ளும் ஆதியின் நிலையைச் சார்ந்ததல்ல.*

O என்பது முதலில் எடுத்துக்கொண்ட ஆதி என்க. $P_1, P_2, \ldots P_n$ என்ற புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் Oவைப் பொறுத்து $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \overline{P_3} \ldots \overline{P_n}$ என்க. O_1 என்பது புது ஆதி எனவும், அதன் நிலை வெக்டர் Oவைப் பொறுத்து $\overline{K}$ எனவும் கொள்க. Oவைப் பொறுத்துச் சராசரி மையம் Gயின் நிலை வெக்டர்

$$\overline{OG} = \frac{m_1\overline{P_1}+m_2\overline{P_2}+m_3\overline{P_3}+\cdots+m_n\overline{P_n}}{m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n}$$

ஆகும். O_1ஐப் பொறுத்து P_1ன் நிலை வெக்டர் $\overline{O_1P_1} = \overline{O_1O}+\overline{OP_1}$ $= \overline{P_1}-\overline{K}$; இதே போன்று $\overline{O_1P_2} = \overline{P_2}-\overline{K}$

$$\overline{O_1P_3} = \overline{P_3}-\overline{K}$$

....

....

$$\overline{O_1P_n} = \overline{P_n}-\overline{K}$$

O_1ஐப் பொறுத்துப் புதுச் சராசரி மையம் G'ன் நிலை வெக்டர்

$$\overline{O_1G'} = \frac{m_1\,\overline{O_1P_1}+m_2\overline{O_1P_2}+\dots\dots+m_n\,\overline{O_1P_n}}{m_1+m_2+\dots\dots+m_n}$$

$$= \frac{m_1\,(\overline{P_1}-\overline{K})+m_2\,(\overline{P_2}-\overline{K})+\dots\dots+m_n(\overline{P_n}-\overline{K})}{m_1+m_2+\dots+m_n}$$

$$= \frac{(m_1\overline{P_1}+m_2\overline{P_2}+\dots+m_n\,\overline{P_n})-\overline{K}(m_1+m_2+\dots+m_n)}{m_1+m_2+\dots\dots+m_n}$$

$$= \frac{m_1\overline{P_1}+m_2\overline{P_2}+\dots+m_n\overline{P_n}}{m_1+m_2+\dots+m_n}-\overline{K}$$

$$= \overline{OG} - \overline{K}$$

$$= \overline{OO_1} + \overline{O_1G}-\overline{K}$$

$$= \overline{K} + \overline{O_1G}-\overline{K}=\overline{O_1G}$$

$\therefore$ G_1 என்பது Gயுடன் ஒன்றும்.

அதாவது வெக்டர்களைக் குறிக்க எடுத்துக்கொள்ளும் ஆதியின் நிலையிணைச் சாராமல் சராசரி மையம் அமையும் என்பது புலனாகிறது.

தேற்றம் 2: $A_1, A_2, A_3, \dots$ எனும் புள்ளிகளுடன் $m_1, m_2, m_3\dots\dots$ என்ற எண்கள் இணைக்கப்பட்டுக் காணப்படும் சராசரி மையம் G_1 என்றும், $B_1, B_2, B_3, \dots$ எனும் புள்ளிகளுடன் $n_1, n_2, n_3, \dots\dots$ எனும் எண்கள் இணைக்கப்பட்டுக் காணப்படும் சராசரி மையம் G_2 என்றும் இருந்தால், அனைத்துப் புள்ளிகளின் சராசரி மையம் G_1, G_2 என்ற இரு புள்ளிகளுடன் முறையே $\Sigma m_1, \Sigma n_1$ என்ற எண்கள் இணைக்கப் பட்டுக் காணப்படும் சராசரி மையமாகும்.

O என்பது ஆதி என்க. $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{B_1}, \overline{B_2}\dots$ என்பன முறையே $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$என்பவற்றின் நிலைவெக்டர்கள் எனில், $A_1, A_2, \dots$ வின் சராசரி மையம் G_1ன் நிலை வெக்டர்

$$\overline{OG_1} = \frac{m_1\overline{A_1}+m_2\overline{A_2}+\dots}{m_1+m_2+\dots}$$

அதேபோல் G_2வின் நிலைவெக்டர்

$$\overline{OG_2} = \frac{n_1\overline{B_1}+n_2\overline{B_2}+\dots}{n_2+n_2+\dots}$$

இனி G_1, G_2 எனும் புள்ளிகளுடன் Σm_1, Σn_1 என்ற எண்களை இணைத்து, சராசரி மையம் G கண்டால்,

$$\overline{OG} = \frac{\Sigma m_1\overline{OG_1}+\Sigma n_1\,\overline{OG_2}}{\Sigma m_1+\Sigma n_1}$$

$$= \frac{\Sigma m_1\overline{A_1}+\Sigma n_1\overline{B_1}}{\Sigma m_1+\Sigma n_1}$$

இதுவே எல்லாப் புள்ளிகளும் சேர்ந்த தொகுதியின் சராசரி மையமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1: $p, q, r, \ldots$ எனும் திசையிலிகள் $p+q+r+\ldots=0$ என இருந்தால் மட்டுமே $p\bar{a}+q\bar{b}+r\bar{c}+\ldots=0$ என்ற வெக்டர் சமன்பாடு, வெக்டர் ஆதியின் நிலையைச் சாராது உண்மையாயிருக்கும் என நிறுவுக.

$p\bar{a}+q\bar{b}+r\bar{c}+\ldots=0 \ldots\ldots(1)$ என்ற சமன்பாடு O எனும் ஓர் ஆதியைப் பொறுத்து உண்மை எனக் கொள்க. O' எனும் வேறோர் ஆதியை எடுத்துக்கொள்வோம். $\overline{OO'}=\bar{K}$ என்க. $\bar{a}$ என்ற நிலை வெக்டருடைய புள்ளி A என்றிருந்தால்,

$$\overline{OA}=\bar{a}=\overline{OO'}+\overline{O'A}$$

$$\therefore\ \overline{O'A}=\bar{a}-\overline{OO'}$$

$$=\bar{a}-\bar{k}$$

எனவே $p\,\overline{O'A}+q\,\overline{O'B}+r\,\overline{O'C}+\ldots=0$ என இருக்க

$p(\bar{a}-\bar{k})+q(\bar{b}-\bar{k})+r(\bar{c}-\bar{k})+\ldots=0$ என இருக்க வேண்டும்.

i.e. $p\bar{a}+q\bar{b}+r\bar{c}+\ldots-\bar{k}(p+q+r+\ldots)=0$

ஆனால் (1)ன்படி $p\bar{a}+q\bar{b}+r\bar{c}+\ldots=0$.

$\therefore\ -\bar{k}(p+q+r+\ldots)=0$.

$k\neq 0. \quad \therefore\ p+q+r+\ldots=0.$

இவ்வாறு ஆதியின் நிலையைச் சாராமல் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி களின் நிலைவெக்டர்களின் ஒருபடி இணைப்புப் பூச்சியமாய் இருக்க $p+q+r+\ldots=0$ ஆக இருப்பது அவசியம் தேவை என்பது நிறுவப் படுகிறது.

மறுதலையாக $p+q+r+\ldots=0$ என்றிருந்தால், வெக்டர் ஆதியின் நிலையைச் சாராமல் $p\bar{a}+q\bar{b}+r\bar{c}+\ldots=0$ எனும் சமன்பாடு உண்மையாயிருக்கும் என நிறுவலாம்.

$p\bar{a}+q\bar{b}+r\bar{c}+\ldots=0$. k என்பது வேறு ஏதோ ஒரு புள்ளி O'ன் நிலைவெக்டர் எனில்,

$$p\bar{a}+q\bar{b}+r\bar{c}+\ldots-\bar{k}(p+q+r+\ldots)=0$$

i.e. $p(\bar{a}-\bar{k})+q(\bar{b}-\bar{k})+r(\bar{c}-\bar{k})+\ldots=0$

அதாவது $p(\overline{O'A})+q(\overline{O'B})+r(\overline{O'C})+\ldots=0$

அதாவது O' என்ற புது ஆதியைப் பொறுத்தும் இவ்வெக்டர் சமன்பாடு உண்மை என்றாகிறது.

குறிப்பு: மூன்று புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையத் தேவையான கட்டுப்பாடு, வெக்டர் ஆதியின் நிலையைச் சாராததாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2: n பக்கங்கள் கொண்ட ஒழுங்குப் பல கோணம் ஒன்றின் $n-2$ மூலைகளில் சமபொருண்மையுடைய துகள்கள் வைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் பொருண்மை மையம் காண்க.

ஒழுங்குப் பல கோணத்தின் மையம் Oவை வெக்டர் ஆதியாய்க் கொண்டு, மூலைகள் A_1, A_2, A_3,...A_nன் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \cdots \bar{a}_n$ என்க. எல்லா மூலைகளிலும் சம பொருண்மையுடைய துகள்கள் இருப்பின் பொருண்மை மையம் Oவுடன் ஒன்றும்.

$$\therefore \frac{\bar{a}_1+\bar{a}_2+\cdots+\bar{a}_n}{n} = 0$$

$$\text{i.e. } \bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3+\cdots+\bar{a}_n = 0$$

$$\therefore \bar{a}_3+\bar{a}_4+\cdots+\bar{a}_n = -(\bar{a}_1+\bar{a}_2)$$

A_1, A_2 என்ற மூலைகளில் துகள்கள் வைக்கப்படாமல், மீதி $n-2$ மூலைகளில் வைக்கப்பட்டதாய்க் கொண்டால், பொருண்மை மையம் Gயின் நிலை வெக்டர்

$$\overline{OG} = \frac{\bar{a}_3+\bar{a}_4+\cdots+\bar{a}_n}{n-2} \text{ ஆகும்.}$$

$$= -\frac{(\bar{a}_1+\bar{a}_2)}{n-2}$$

இனி, $A_1 A_2$வின் நடுப்புள்ளியான Mன் நிலை வெக்டர் $\frac{\bar{a}_1+\bar{a}_2}{2}$

$$\therefore \overline{MO} = -\frac{(\bar{a}_1+\bar{a}_2)}{2}$$

$$\therefore \overline{OG} = -\left(\frac{\bar{a}_1+\bar{a}_2}{n-2}\right)$$

$$= \frac{2}{n-2}\,\overline{MO} \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது $A_1 A_2$வின் மையக் குத்துக் கோட்டில், Oவிலிருந்து $\frac{2}{m-2}\overline{MO}$ என்ற தொலைவில் பொருண்மை மையம் அமைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3: $i, 4i, 9i, \ldots\ldots n^2 i$; $j, 4j, 9j, \ldots\ldots n^2 j$; k, $4k$, $9k, \ldots\ldots n^2 k$, எனும் நிலை வெக்டர்களுடைய $3n$ புள்ளிகளின் சராசரி மையம் காண்க.

$i, 4i, 9i, \ldots\ldots n^2 i$ எனும் தொகுதியின் சராசரி மையம் G_1 எனவும், $j, 4j, 9j, \ldots\ldots n^2 j$, எனும் தொகுதியின் சராசரி மையம் G_2 எனவும், $k, 4k, 9k, \ldots\ldots n^2 k$ எனும் தொகுதியின் சராசரி மையம் G_3 எனவும், கொள்க.

$$\therefore\ \overline{OG_1} = \frac{i + 4i + 9i + \ldots\ldots + n^2 i}{n}$$

$$= \frac{i\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2)}{n}$$

$$= \frac{i\; n(n+1)\,(2n+1)}{6.\; n}$$

$$= \frac{i\;(n+1)(2n+1)}{6}$$

இதே போல் $\overline{OG_2} = \dfrac{j\;(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\overline{OG_3} = \frac{k\;(n+1)(2n+1)}{6} \text{ ஆகும்.}$$

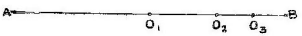
இனி G என்பது, 3 தொகுதிகளும் சேர்ந்த தொகுதியின் சராசரி மையம் எனில் G_1, G_2, G_3 எனும் மூன்று புள்ளிகளின் சராசரி மையமும் அதுவேயாகும்.

அதாவது $\overline{OG} = \dfrac{\overline{OG_1} + \overline{OG_2} + \overline{OG_3}}{3}$,

$$= \frac{(n+1)\,(2n+1)}{6}\left\{\frac{i+j+k}{3}\right\}.$$

$$= \frac{(n+1)\,(2n+1)}{18}\,(i+j+k).$$

எடுத்துக்காட்டு 4 : ஒரு நேர் கோடு ABயை O_1 இரு சம பாகமாய்ப் பிரிக்கிறது. O_1Bயை O_2வும், O_2Bயை O_3யும், என, தொடர்ந்து முடிவிலா வகையில் இரு சமபாகமாய்ப் பிரித்துக்கொண்டே செல்கின்றன. $m, \dfrac{m}{2}, \dfrac{m}{2^2}, \dfrac{m}{2^3} \ldots\ldots$ எனும் பொருண்மையுடைய துகள்கள், $O_1, O_2, O_3 \ldots\ldots$ எனும் புள்ளிகளில் வைக்கப்பெற்றால், அவற்றின் பொருண்மை மையம் Bயிலிருந்து $\dfrac{AB}{3}$ என்ற தொலைவில் உள்ளது என நிறுவுக.



படம் 27.

Bயினை வெக்டர் ஆதியாய்க் கொண்டு Aயின் நிலை வெக்டர் $\overline{a}$ என்க. $\therefore$ O_1ன் நிலை வெக்டர் $\frac{\overline{a}}{2}$,

O_2, O_3,......வின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\frac{\overline{a}}{2^2}$, $\frac{\overline{a}}{2^3}$, ...ஆகும். அப்புள்ளிகளில் வைக்கப்படும் துகள்களின் பொருண்மைகள் m, $\frac{m}{2}$, $\frac{m}{2^2}$,.....

$$\overline{BG} = \frac{m.\frac{\overline{a}}{2}+\frac{m}{2}\cdot\frac{\overline{a}}{2^2}+\frac{m}{2^2}\cdot\frac{\overline{a}}{2^3}+\ldots\ldots}{m+\frac{m}{2}+\frac{m}{2^2}+\ldots\ldots}$$

$$= \overline{a}\ \frac{\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\ldots\ldots\infty \text{ வரை}\right\}}{\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\ldots\infty \text{ வரை}\right\}}$$

$$= \overline{a}\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}\right)\Big/\frac{1}{(1-\frac{1}{2})}$$

$$= \overline{a}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\overline{a}}{3}$$

அதாவது பொருண்மை மையம் Bயிலிருந்து ABயில் மூன்றில் ஒரு பங்கு தொலைவில் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 5 : பல மையங்களிலிருந்து, துகளின் தூரத்துக்கு நேர் விகிதத்திலமைந்த ஆனால் திண்மை (intensity) மாறுபட்ட ஈர்ப்பு விசை, விலக்கு விசைகள் ஒரு துகளின் மேல் செயல்படுகின்றன. அவ்விசைகளின் இணைவாக்க விளைவு, துகளின் எல்லா நிலைகளுக்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

O_1, O_2, O_3,......என்பன விசை மையங்கள் (Centre of force) எனவும் O துகளின் நிலை எனவும் கொள்க.

$\overline{OO_1}=\overline{a}$, $\overline{OO_2}=\overline{b}$, $\overline{OO_3}=\overline{c}$ எனில்,

செயல்படும் விசைகள் $\mu_1\overline{a}$, $\mu_2\overline{b}$, $\mu_3\overline{c}$,......என அமையும்.

இதில் வரும் μ_1, μ_2, μ_3,......எனும் எண்கள், ஈர்ப்பு விசையானால் மிகையாகவும், விலக்கு விசையானால் குறைவெண்ணாகவும் இருக்கும்.

$\overline{G}$ என்ற சராசரி மையத்தின் நிலை வெக்டர் $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots\ldots$ என்ற இணைக்கப்பட்ட எண்களுக்கு

$$\overline{OG} = \frac{\mu_1\overline{a}+\mu_2\overline{b}+\mu_2\overline{c}+\ldots\ldots}{\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots\ldots} \qquad \ldots\ldots(1)$$

என்றாகும். இனி விசைகளின் இணைவாக்க விளைவு

$$= \mu_1\overline{a}+\mu_2\overline{b}+\mu_3\overline{c}+\ldots\ldots$$

(1) ல் இருந்து இவ்விளைவு $= (\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots\ldots)\ \overline{OG}$ எனக் கிடைக்கும். G என்ற சராசரி மையம் ஆதியின் எல்லா நிலைகளுக்கும் மாறுநதாகும். எனவே துகளின் எல்லா நிலைகளுக்கும் இணைவாக்க விளைவு, விசை மையங்களின் சராசரி மையத்தின் வழிச் செல்லும்.

§ 1·12. இயக்கவியலில் வெக்டர்கள் வெகுவாகப் பயன்படுகின்றன. எவ்வாறு அவற்றைக் கையாள வேண்டும் என்பதை இப்பகுதியில் காணலாம்.

இடப் பெயர்ச்சியும், திசை வேகமும் (Displacement and velocity): இடப் பெயர்ச்சிக்கு அளவும் உண்டு திசையும் உண்டு என்று ஏற்கனவே சொன்னோம். எனவே அது ஒரு வெக்டர் ஆகும். ஒரு துகள் Aயிலிருந்து Bக்கும், பிறகு Bயிலிருந்து Cக்கும் நகர்த்தப் பெற்றால், அதன் முடிவான இடப் பெயர்ச்சி AC என்பது வெக்டர் கூட்டல் $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ என்பதிலிருந்து கிடைக்கிறது.

திசை வேகம் என்பது இடப் பெயர்ச்சி மாறும் விகிதம் ஆகும். எனவே அதுவும் ஒரு வெக்டர் ஆகும். ஒரு துகளின் மேல் இரு திசை வேகங்கள் செயல்பட்டால் அவ்விரண்டின் இணைவாக்க விளைவுத் திசை வேகம் வெக்டர் கூட்டலினால் கிடைக்கும். $u=\overline{AB}$, $v=\overline{BC}$ என்பவை இரு திசை வேகங்களைக் குறித்தால், அவற்றின் இணைவாக்க விளைவுத் திசை வேகம் $\overline{AC}$ ஆகும்.

இயற்பியலில் இந்த இணைவாக்க விளைவுத் திசை வேகத்தினை $W = \sqrt{u^2+v^2+2uv\cos\theta}$ எனும் வாய்ப்பாட்டினால் பெறுகிறோம்.

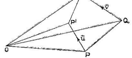
§ 1·13. சார்புத் திசை வேகம் (Relative Velocity)

இரு நகரும் புள்ளிகள் ஏதேனும் ஒரு கணத்தில் P, Q எனும் இரு புள்ளிகளிலிருந்தால், Pயைப் பொறுத்த Qவின் சார்பு நிலை (Relative position) $\overline{PQ}$ என்ற வெக்டராகும்.

O என்பது நிலையான புள்ளி யெனில், $\overline{OQ}=\overline{OP}+\overline{PQ}$ எனவே Oவைப் பொறுத்து Qவின் நிலை, Oவைப் பொறுத்த Pயின்

சார்பு நிலையுடன், Pயைப் பொறுத்த Qவின் சார்பு நிலையைக் கூட்டிய வெக்டர் ஆகும்.

மேலும் $\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}$ ஆகையால், Pயைப் பொறுத்து Qவின் சார்பு நிலை, Oவைப் பொறுத்த Qவின் நிலைக்கும், Pயின் நிலைக்கும் உள்ள வெக்டர் கழித்தல் ஆகும்.



படம் 28.

Pயும் Qவும் முறையே P', Q' என்ற புள்ளிகளுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் நகர்வதாய்க் கொள்வோம். அப்படியானால் Pயைப் பொறுத்த Qவின் சார்பு இடப்பெயர்ச்சி (Relative displacement)

$$= \overline{P'Q'} - \overline{PQ}$$
$$= \overline{OQ'} - \overline{OP'} - (\overline{OQ} - \overline{OP})$$
$$= (\overline{OQ'} - \overline{OQ}) - (\overline{OP'} - \overline{OP})$$
$$= QQ' - PP'$$

ஆனால் Oவைப் பொறுத்து Pயும் Qவும் முறையே u, v என்ற ஒரே சீரான மாறாத திசை வேகங்களுடன் நகர்வதாயும், PP', QQ' எனும் இடப்பெயர்ச்சிகள் ஓரலகு நேரத்தில் நிகழ்வதாயும் கொண்டால், $PP' = u$, $QQ' = v$.

$\therefore$ Pயைப் பொறுத்து Qவின் சார்புத்திசை வேகம்
$$= QQ' - PP'$$
$$= v - u.$$

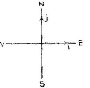
அதாவது Qவின், Pயைப் பொறுத்த திசைவேகம்

= Oவைப் பொறுத்த Qவின் திசை வேகம் − Oவைப் பொறுத்த Pயின் திசை வேகம்.

எடுத்துக்காட்டு 1: ஒரு மனிதன் கிழக்கு நோக்கி மணிக்கு 5 மைல் வேகத்தில் நகர்கையில் காற்று வடக்கிலிருந்து வருவதாய்த்

தோன்றியது. அவன் வேகத்தை இருமடங்காக்கியபோது காற்று வடகிழக்கிலிருந்து வீசுவதாய்த் தோன்றியது. காற்றின் வேகத்தின் திசையையும் அளவையும் கணக்கிடுக.

நேர் கிழக்கு நேர் வடக்குத் திசைகளில் அமைந்த ஓரலகு வெக்டர்கள் முறையே i, j என்க.



படம் 29.

மனிதன் கிழக்கு நோக்கி மணிக்கு 5 மைல் வேகத்தில் நகர்வதை $5i$ என்ற வெக்டர் குறிக்கும். காற்றின் உண்மையான திசை வேகம் $xi+yj$ எனக்கொண்டு பின்னர் x, y ஆகிய திசையிலிகளை நிர்ணயிப்போம்.

மனிதனைப் பொறுத்த, காற்றின் சார்புத்திசை வேகம் $xi+yj-5i$ ஆனல் வடக்கிலிருந்து காற்று வீசுவதுபோல் தோன்றுவதால் இது $-lj$ வடிவில் இருக்கவேண்டும். அதாவது

$x-5=0$, $y=-l$, l என்பது ஏதோ ஒரு தகுந்த எண். மேலும் மனிதனின் வேகம் $10i$ ஆகும்போது காற்றின் சார்புத்திசை வேகம் $xi+yj-10i$. இது வடகிழக்கிலிருந்து வருவதுபோல் தோன்றுவதால் $-m(i+j)$என்ற வடிவில் இருக்கவேண்டும். அதாவது $x-10=y=-m$.

$$\text{i.e. } y = x-10$$
$$= 5-10$$
$$= -5.$$

$\therefore$ காற்றின் திசை வேகம் $5i-5j$.

இத்திசை வேகத்தின் அளவு $\sqrt{5^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$. மைல்கள்/மணிக்கு.

இத்திசை வேகம் நேர்கிழக்கோடு $\tan^{-1}\left(\dfrac{-5}{5}\right)=\tan^{-1}(-1)$

$=135°$ எனும் கோணச் சாய்வில் உள்ளது. அதாவது வடமேற்கிலிருந்து வீசுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2: ஓராற்றில் படகின் திசை வேகம் நீரைப் பொறுத்து $3i+4j$. தரையைப் பொறுத்து நீரின் திசை வேகம் $i-3j$. i, j என்பன நேர்கிழக்கு, நேர்வடக்கு ஆகிய திசைகளில் மணிக்கு ஒரு மைல் திசை வேகம் என்றால், தரையைப் பொறுத்துப் படகின்

வேகம் மணிக்கு $\sqrt{17}$ மைல்கள் எனவும் அதன் திசை $[\tan^{-1}(\frac{1}{4})]^\circ$ கிழக்கிலிருந்து வடக்கு நோக்கித் திரும்பியுள்ளது எனவும் நிறுவுக.

நீரைப் பொறுத்துப் படகின் திசை வேகம் =
படகின் திசை வேகம் – நீரின் திசை வேகம்.

நீரின் திசை வேகம் தரையைப் பொறுத்து $= i - 3j$.

தரையைப் பொறுத்துப படகின் வேகம்

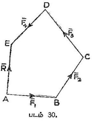
$$= 3i + 4j + i - 3j$$
$$= 4i + j$$

$\therefore$ வேகத்தின் அளவு $= \sqrt{17}$ மைல்கள்/மணிக்கு

இவ்வேகத்தின் திசை $[\tan^{-1}(\frac{1}{4})]^\circ$ எனும் கோணம் i-ன் திசையுடன் உருவாக்கும் அதாவது நேர்கிழக்கிலிருந்து வடக்கு நோக்கி $[\tan^{-1}(\frac{1}{4})]^\circ$ திரும்பிய திசையில் செயல்படும்.

§ 1·14. ஒரு புள்ளியிற் செயல்படும் விசைகள் (Concurrent forces)

விசைக்கு அளவும் திசையும் உண்டு. ஆகையால் அது வெக்டராகும் என்று கண்டோம். ஒரு பொருளின்மீது ஒரு விசையின் விளைவு (effect) அவ்விசை செயல்படும் கோட்டினைப் பொறுத்து மாறும் இயல்புடையது. எனவே விசையானது அறுதியிட்ட வெக்டராகும் (localised vector). அவ்வாறு எடுத்துக்கொள்ளும்போதுதான் அவ்விசையின் விளைவுகளைப் பற்றித் தெளிவாக அறிய இயலும். ஈண்டு நாம் ஒரு புள்ளியிற் செயல்படும் பல விசைகளைப் பற்றி ஆராயலாம்.



படம் 30.

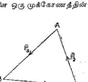
ஒரு புள்ளியிற் செயல்படும் விசைகள் F_1, F_2, F_3, F_4 என்க. இவற்றை $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ என்ற வெக்டர்களால் குறிக்க இயலும் என்று கொள்வோம். அப்படியானால் அந்நான்கு விசைகளின் இணைவாக்க விளைவு விசையினை வெக்டர் கூட்டல் மூலம் காணலாம். அதாவது இணைவாக்க விளைவுவிசை

$$\overline{R} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE}$$
$$= \overline{AE}$$

இவ்வாறு ஒரு புள்ளியிற் செயல்படும் பல விசைகளின் இணைவாக்க விளைவு விசையைக் காண வரையப்படும் பல கோணத்திற்கு வெக்டர் பல கோணம் (Vector polygon) எனப் பெயர்.

ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் பல விசைகளை, ஒரு மூடப்பெருத பல கோணத்தின் ஒரேமுக ஒழுங்கில் எடுக்கப்பட்ட பக்கங்களால் குறிக்க இயலுமானால், அவ்விசைகளின் இணைவாக்க விளைவு விசை, அப்பல கோணத்தின் ஆரம்பப் புள்ளியையும் முடிவுப்புள்ளியையும் இணைக்கும் கோட்டினால் அளவிலும் திசையிலும் நிர்ணயிக்கப்படும். எனவே விசைகள் செயல்படும் புள்ளியைச் சமநிலையில் (equilibrium) நிறுத்துமானால், அவ்விசைகளின் வெக்டர் பலகோணம் மூடப் பெற்றதாய் விளங்கும். இதனின்றும் விசைப் பலகோணத் தேற்றம் என்பது கிடைக்கப் பெறுகிறது. (Theorem of Polygon of Forces). அதாவது ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் பல விசைகளை ஒரு மூடப்பெற்ற பலகோணத்தின் ஒரேமுக ஒழுங்குமுறையில் எடுக்கப்பட்ட பக்கங்களினால் குறிக்க இயலுமானால், அவ்விசைகள் அப்புள்ளியினைச் சமநிலையில் (இயங்காநிலையில்) நிறுத்தும் என்பதாகும். ஆனால் இதன் மறுதலை உண்மையில்லை. ஏனெனில் கொடுக்கப்பட்ட திசைகளைப் பக்கங்களாகக் கொண்டு, ஒன்றுக்கொன்று வடிவொத்தில்லாத பல பலகோணங்களை வரைய இயலும். அதாவது பலகோணத்தின் பக்கங்களின் திசைகள் தெரிந்ததனால், அப்பக்கங்களின் விகிதம் தெரிவது இயலாது என்பதாகும்.

ஒரு புள்ளியில் மூன்றுவிசைகள் மட்டிலும் செயல்பட்டு, அப்புள்ளியை இயங்கா நிலையில் நிறுத்துமானால், வெக்டர் பலகோணம் வெக்டர் முக்கோணமாகிவிடும். அதனால் விசை முக்கோணத் தேற்றம் (Theorem of triangle of forces) என்பது கிடைக்கும். அதாவது "ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் மூன்று விசைகளை ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரேமுக ஒழுங்கில் எடுக்கப்பட்ட பக்கங்களால் குறிக்க இயலுமானால், அம்மூன்று விசைகளும் அப்புள்ளியைச் சமநிலையில் நிறுத்தும்" என்பதாகும். இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும். அதாவது "ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் மூன்று விசைகள் அப்புள்ளியை இயங்காநிலையில் நிறுத்துமானால், அம்மூன்று விசைகளையும் ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரே முக ஒழுங்கில் எடுக்கப்பட்ட பக்கங்களால் குறிக்க இயலும்" என்பதாகும்.

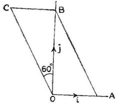


படம் 31.

படத்தில் காட்டியவாறு F_1, F_2, F_3 எனும் விசைகள், $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ எனும் வெக்டர்களால் குறிக்கத்தக்கவாறு ஒரு புள்ளியில் செயல் பட்டால், அப்புள்ளி இயங்கா நிலையில் நிற்கும்.

ஒரு புள்ளிவழிச் செயல்படும் n விசைகள் F_1, F_2, F_3,...F_n என்பன, P_1, P_2, P_3,...P_n எனும் n புள்ளிகளின் நிலைவெக்டராகக் குறிக்கக் கூடியனவாய் அமையுமானால், அவ்விசைகளின் இணைவாக்க விளைவு விசையானது $R = \overline{OP}_1 + \overline{OP}_2 + ...\overline{OP}_n = n\ \overline{OG}$ எனும் வெக் டரால் குறிக்கப்பெறும். இதில் G என்பது அந்த n புள்ளிகளின் சராசரி மையம் ஆகும். இச்சராசரி மையம் ஆதியாகிய Oவுடன் ஒன்றினால், $\overline{OG} = 0$; அதாவது விசைகளின் இணைவாக்க விளைவுவிசை பூச்சிய மாகும். எனவே விசைகள் அவை செயல்படும் புள்ளியைச் சமநிலையில் நிறுத்தும்.

எடுத்துக்காட்டு 1: கிடைமட்டக் கோட்டில் (Horizontal) செயல்படும் ஒரு விசையும், குத்துக்கோட்டிற்கு 60° சாய்வில் அமைந்த வேறொரு கோட்டில் செயல்படும் ஒரு விசையும் சேர்ந்து P பவுண்டு எடை விசையை இணைவாக்க விளைவு விசையாகக் குத்துக்கோட் டின் திசையில் அளிக்குமானால் அவ்விசைகளைக் கண்டுபிடி.



படம் 32.

OA எனும் கிடைமட்டக் கோட் டின் திசையில் உள்ள ஓரலகு வெக்டர் i என்றும், OB எனும் குத்துக்கோட்டின் திசையில் உள்ள ஓரலகு வெக்டர் j எனவும் கொள்க.

$\overline{OA} = xi$, $\overline{OC} = li + mj$ என்க.

x, l, m என்பன நிர்ணயிக்கப்படவேண்டிய திசையிலிகள். இவ் விரண்டு விசைகளும் சேர்ந்து இணைவாக்க விளைவுவிசை $\overline{OB} = Pj$ கொடுக்கின்றன.

$$\overline{OC} = \overline{AB} = li + mj$$

மேலும் $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$

$$= xi + li + mj$$

$$= (x + l)\, i + mj$$

$\therefore\ Pj = (x+l)\,i + mj$

$\therefore\ x+l = 0;\ m = P$

i.e. $x = -l,\ m = P$

மேலும் OC, OAயுடன் $150°$ உருவாக்குவதால் அதன் சரிவு $= \tan\ 150° = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

ஆனால் $li+mj$ என்ற வெக்டரிலிருந்து இத்திசையைக் கணக்கிட்டால் $\tan 150° = \dfrac{m}{l}$.

$$\therefore\ \frac{m}{l} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad m = -\frac{l}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ l = -\sqrt{3}\,P, \qquad m = P$$

$$\therefore\ li+mj = (-\sqrt{3}i+j)P$$

$$xi = -li$$

$$= \sqrt{3}\,Pi$$

எடுத்துக்காட்டு 2 : ஒரு வட்டத்தின் பரிதியை $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ என்ற n புள்ளிகள் சமபாகங்களாய்ப் பிரிக்கின்றன. A என்பது வட்டத்தின் தளத்தில்தான் அமையவேண்டும் என்ற கட்டாயமில்லாத ஏதோ ஒரு புள்ளி. $\overline{AP_1}$, $\overline{AP_2}, \ldots \overline{AP_n}$ என்ற வெக்டர்களின் இணை வாக்க விளைவைக் கண்டுபிடி.

சமச்சீர் (Symmetry) நோக்கில் காணும்போது $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ என்ற கொடுக்கப்பட்ட n புள்ளிகளின் சராசரி மையம் வட்டத்தின் மையமாகும். வட்டமையம் G எனில், $\overline{AP_1}+\overline{AP_2}+\overline{AP_3}+\cdots\overline{AP_n} = n\overline{AG}$.

எடுத்துக்காட்டு 3 : $ABCD$ ஒரு நாற்கரம். விசைகள் $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ ஒரு புள்ளியில் செயல்படு கின்றன. அவற்றின் இணைவாக்க விளை வான விசை என்ன ?

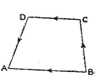
$\overline{BA}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ என்ற விசை கள் ஒரு புள்ளியிற் செயல்பட்டால், அவற் றின் இணைவாக்க விளைவு விசை

$$= \overline{BA}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$$

$$= \overline{BA}+\overline{BC}+\overline{CA}$$

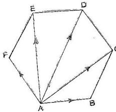
$$= \overline{BA}+\overline{BA}$$

$= 2\,\overline{BA}$ ஆகும்.



படம் 33.

எடுத்துக்காட்டு 4 : $ABCDEF$ என்ற ஒழுங்கு அறுகோணத்தில் A என்ற முனையில் விசைகள் $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{AF}$ செயல்பட்டால் அவற்றின் இணைவாக்க விளைவு விசை $3\,\overline{AD}$ எனக் காண்பி.



படம் 34.

$ABCDEF$ ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணம்.

Aயில் செயல்படும் விசைகள் $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{AF}$ என்பவைகளால் குறிக்கப்படுகின்றன.

அவற்றின் இணைவாக்க விளைவு விசை

$$= \overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}+\overline{AE}+\overline{AF}.$$
$$= (\overline{AD}+\overline{DB})+(\overline{AD}+\overline{DC})+(\overline{AD})+\overline{AE}+\overline{AF}.$$
$$= 3\,\overline{AD}+(\overline{DB}+\overline{AE})+(\overline{DC}+\overline{AF}).$$

ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணத்தில் AE, BDக்கு இணையாகவும் சமமாகவும் இருக்கும்.

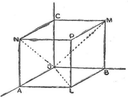
$$\therefore\ \overline{AE} = \overline{BD} = -\overline{DB}.$$
$$\therefore\ \overline{AE}+\overline{DB} = 0.$$

மேலும் AF, CD என்பன ஒன்றுக்கொன்று இணையாயும் சமமாயும் இருக்கும்.

$$\text{எனவே } \overline{AF} = \overline{CD} = -\overline{DC}$$
$$\therefore\ \overline{AF}+\overline{DC} = 0.$$
$$\therefore\ \text{இணைவாக்க விளைவு விசை} = 3\,\overline{AD}.$$

எடுத்துக்காட்டு 5 : a, $2a$, $3a$ எனும் அலகுகள் கொண்ட மூன்று வெக்டர்கள் ஒரு கன சதுரத்தின் ஒரு மூலையில், அதில் சந்திக்கும் மூன்று பக்கங்களின் மூலைவிட்டங்களின் திசைகளில் செயல்படுகின்றன. அவ்வெக்டர்களின் இணைவாக்க விளைவான வெக்டரையும் அதன் திசைக் கொசைன்களையும் கண்டுபிடி.

கனசதுரத்தின் ஒரு மூலை O என்க. அதன் வழிச் செல்லும் மூன்று விளிம்புகள் OA, OB, OC என்க. கனசதுரத்தின் பக்கம் 1 அலகு என்க.



படம். 35

a, $2a$, $3a$ அலகுகள் கொண்ட வெக்டர்கள் OL, OM, ON என்ற பக்கங்கள் வழியே செயல்படுவதாய்க் கொள்வோம்.

OA, OB, OC வழியமைந்த ஓரலகு வெக்டர்கள் i, j, k என்க.

$$\overline{OL} = \overline{OA} + \overline{AL}$$
$$= i + j$$

$\therefore \; |\overline{OL}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\therefore \;$ OL வழியமையும் ஓரலகு வெக்டர் $= \dfrac{i+j}{\sqrt{2}}$.

இதேபோல் OM வழியமையும் ஓரலகு வெக்டர் $= \dfrac{j+k}{\sqrt{2}}$,

ON வழியமையும் ஓரலகு வெக்டர் $= \dfrac{k+i}{\sqrt{2}}$.

$\therefore$ a அலகு உள்ள வெக்டர் OL வழியாகச் செயல்பட்டால் அவ் வெக்டர் $= a\,\dfrac{(i+j)}{\sqrt{2}}$,

OM வழிச் செயல்படும் $2a$ அலகு கொண்ட வெக்டர் $= 2a\,\dfrac{(j+k)}{\sqrt{2}}$.

ON வழிச் செயல்படும் $3a$ அலகு உள்ள வெக்டர் $= 3a\,\dfrac{(k+i)}{\sqrt{2}}$.

இம் மூன்றின் இணைவாக்க விளைவு

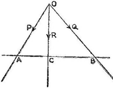
$$= a\,\frac{(i+j)}{\sqrt{2}} + 2a\,\frac{(j+k)}{\sqrt{2}} + 3a\,\frac{(k+i)}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{a\,(4i+3j+5k)}{\sqrt{2}}$$

இதன் எண்ணளவு $= a\dfrac{\sqrt{16+9+25}}{2} = 5a.$

இதன் திசைக் கொசைன்கள் $\dfrac{\frac{4a}{\sqrt{2}}}{5a}, \dfrac{\frac{3a}{\sqrt{2}}}{5a}, \dfrac{\frac{5a}{\sqrt{2}}}{5a}.$

$= \dfrac{4}{5\sqrt{2}}, \dfrac{3}{5\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

எடுத்துக்காட்டு 6: P, Q என்ற விசைகள் O வில் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் இணைவாக்க விளைவு விசை R. ஏதாம் ஒரு குறுக்கு வெட்டி அவ்விசைகளின் செயல்படு கோடுகளை முறையே A, B, C யில் வெட்டினால், $\dfrac{P}{OA} + \dfrac{Q}{OB} = \dfrac{R}{OC}$ என நிறுவுக.



படம் 36.

O வினை ஆதியாய்க் கொண்டு A, B, Cயின் நிலை வெக்டர்கள் $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்க. அதாவது $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$, $\overline{OC} = c \cdot OA$ வழி யமையும் ஓரலகு வெக்டர் $= \dfrac{\overline{OA}}{OA} = \dfrac{\overline{a}}{OA}.$

இதே போல் OB வழியாகவும், OC வழியாகவும் அமையும் ஓரலகு வெக்டர்கள் முறையே $\dfrac{\overline{b}}{OB}$, $\dfrac{\overline{c}}{OC}$ ஆகும்.

எனவே OA வழிச் செயல்படும் P என்ற விசையை $P\dfrac{\overline{a}}{OA}$ யும், OB வழிச் செயல்படும் Q என்ற விசையை $Q\dfrac{\overline{b}}{OB}$யும், OC வழிச் செயல்படும் R எனும் விசையை $R\dfrac{\overline{C}}{OC}$ யும் குறிக்கும்.

ஆனல் R என்பது P, Q வின் இணைவாக்க விளைவு

$$\therefore \quad P\frac{\overline{a}}{OA} + Q\frac{\overline{b}}{OB} = R\frac{\overline{c}}{OC}$$

$$\text{i.e.} \quad P\frac{\overline{a}}{OA} + Q\frac{\overline{b}}{OB} - R\frac{\overline{c}}{OC} = 0$$

ஆனல் A, B, C என்பன ஒரே நேர்கோட்டிலுள்ள புள்ளிகள்.

$$\therefore \quad \frac{P}{\overline{OA}} + \frac{Q}{\overline{OB}} - \frac{R}{\overline{OC}} = 0 \text{ என இருக்கவேண்டும்.}$$

$$\therefore \quad \frac{P}{\overline{OA}} + \frac{Q}{\overline{OB}} = \frac{R}{\overline{OC}}.$$

பயிற்சி 1

1. A, B, C, D எனும் புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ என்பன முறையே $3i+4j+5k$, $4i+5j+6k$, $7i+9j+3k$, $4i+6j$ ஆகும். AB, CDக்கு இணை என நிறுவுக.

2. $\overline{a}=2i-j+k$, $\overline{b}=i-3j+5k$, $\overline{c}=3i-4j-4k$ எனும் நிலை வெக்டர்களுடைய மூன்று புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை உருவாக்கும் எனக் காண்பி.

3. Δ ABCயில் G நடுக் கோட்டுச் சந்தி. O ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=3\ \overline{OG}$ என நிறுவுக.

4. $ABCD$ என்ற இணைகரத்தில் மூலை விட்டங்கள் Gயில் வெட்டுகின்றன. O ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=4\ \overline{OG}$ என நிறுவுக.

5. $ABCDEF$ என்ற ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் மையம் O. $\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}+\overline{AE}+\overline{AF}=6\ \overline{AO}$ என நிறுவுக.

6. $ABCD$ எனும் நாற்கரத்தில் $\overline{AB}+\overline{DC}=\overline{AC}+\overline{DB}$ எனக் காண்பி.

7. A, B, C, D என்ற நான்கு புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, $2\underline{\alpha}+3\underline{\beta}$, $\underline{\alpha}-2\underline{\beta}$ எனில், $\overline{AC}$, $\overline{DB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ என்ற வெக்டர்களைக் கண்டுபிடி.

8. A, B எனும் இரு புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் $\overline{a}$, $\overline{b}$. ABயின் நீட்சியில் $AC=3\ AB$ என அமைந்துள்ள C எனும் புள்ளியின் நிலை வெக்டர் என்ன? BAயின் நீட்சியில் $BD=2\ BA$ என அமைந்துள்ள D எனும் புள்ளியின் நிலை வெக்டர் என்ன?

9. ஒரு கன சதுரத்தின் ஒரு மூலையில் சந்திக்கும் மூன்று பக்கங்களின் மூலைவிட்டங்கள் அம் மூலையில் சந்திக்கின்றன. அம் மூலை விட்டங்களால் குறிக்கப்பெறும் வெக்டர்களின் இணைவாக்க விளைவு கன சதுரத்தின் மூலை விட்டத்தினைப் போல் இரு மடங்கு என நிறுவுக.

10. ஓர் இணைவகத்திண்மத்தின் நான்கு மூலை விட்டங்களும், எதிரெதிர் விளிம்புகளின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடுகளும்

எல்லாவற்றையும் இரு சமபாகமாக்கும் ஒரு பொதுப்புள்ளியின் வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

11. ஒரு தளமிலா நாற்கரத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் ஓர் இணைகரத்தினை உருவாக்கும் என நிறுவுக.

12. A, B, C, Dயின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\overline{a}, \overline{b}, 3\overline{a}+2\overline{b}$. $2\overline{a}-3\overline{b}$ எனில் $\overline{AC}, \overline{DB}, \overline{BC}, \overline{DA}$ எனும் வெக்டர்களைக் கண்டுபிடி,

13. $l\overline{a}+m\overline{b}=0$ எனவும் $l+m=0$ எனவுமிருந்து lம், mம் தனித் தனியே பூச்சியமில்லை எனவுமிருந்தால், $\overline{a}=\overline{b}$ எனக் காண்பி.

14. வடிவகணித முறைப்படி $\overline{a} = \dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2} + \dfrac{\overline{a}-\overline{b}}{2}$

$\overline{b} = \dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2} - \dfrac{\overline{a}-\overline{b}}{2}$ என்பவற்றை நிறுவுக.

15. $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ என்பன ஒரேதள அமைப்பில்லாததும் பூச்சிய மில்லாததுமான மூன்று வெக்டர்கள். l, m, n என்பன திசையிலா அளவுருக்கள். $l\overline{a}+m\overline{b}+n\overline{c}=0$ எனில் $l=m=n=0$ என நிறுவுக.

16. $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ என்பன ஒரு நாற்கரத்தின் அடுத்தடுத்த பக்கங்களால் குறிக்கப்பெறும் வெக்டர்கள். $\overline{a}+\overline{c}=0$, $\overline{b}+\overline{d}=0$ எனில் நாற்கரம் இணைகரம் என்றும், இணைகரமானல் மேற்கூறிய சமன்பாடுகள் உண்மை எனவும் நிறுவுக.

17. A, B, C, D எனும் புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $2i+3j+5k$, $i+2j+3k$, $-5i+4j-2k$, $i+10j+10k$ எனில் ABயும் CDயும் இணை என நிறுவுக.

18. ΔABCயின் முனைகளின் நிலை வெக்டர்கள் $2i+4j-k$, $4i+5j+k$, $3i+6j-3k$ என்பன. முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணம் என நிறுவி ABயின் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

19. A, B, C, D என்ற நாற்கரத்தின் முனைகளின் நிலை வெக்டர்கள் $3i-4j+k$, $4i+3j-k$, $2i+3j-k$, $3i+2j-4k$. மூலை விட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனக் காண்பி.

20. OA, OB, OC என்பன ஓர் இணைகரத் திண்மத்தின் விளிம்புகள். $\overline{OA}=\overline{a}$, $\overline{OB}=\overline{b}$, $\overline{OC}=\overline{c}$, எனில் $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$, $\overline{b}+\overline{c}-\overline{a}$, $\overline{c}+\overline{a}-\overline{b}$, $\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$ என்பவற்றின் பொருளை விளக்கு.

21. $\overline{a}-2\overline{b}+3\overline{c}$, $-2\overline{a}+3\overline{b}-4\overline{c}$; $-\overline{b}+20\overline{c}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒரேதள அமைவுடைய வெக்டர்கள் எனக் காண்பி.

22. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்பவை ஏதோ மூன்று வெக்டர்கள் எனில் $5\overline{a}+6\overline{b}+7\overline{c}$, $7\overline{a}-8\overline{b}+9\overline{c}$, $3\overline{a}+20\overline{b}+5\overline{c}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரேதள அமைவுடைய வெக்டர்கள் எனக் காண்பி.

23. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்பன ஒரேதள அமைவிலா வெக்டர்கள் எனில்

(i) $\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}$, $\overline{b}+\overline{c}-\overline{a}$; $2\overline{a}-3\overline{b}+4\overline{c}$

(ii) $2\overline{a}-\overline{b}+3\overline{c}$, $\overline{a}+\overline{b}-2\overline{c}$, $\overline{a}+\overline{b}-3\overline{c}$

ஆகிய வெக்டர்களும் ஒரேதள அமைவிலாதவையென நிறுவுக.

24. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்பன ஒரேதள அமைவிலாதவையெனில்,

(i) $\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}$; $\overline{b}+\overline{c}-\overline{a}$; $\overline{c}+\overline{a}+\overline{b}$; $2\overline{a}-3\overline{b}+4\overline{c}$,

(ii) $\overline{a}-2\overline{b}+\overline{c}$, $-\overline{b}+2\overline{c}+\overline{a}$, $\overline{c}-\overline{a}+3\overline{b}$, $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$

ஆகிய வெக்டர் தொகுதிகளினிடையே உள்ள ஒருபடித் தொடர்பைக் (linear relation) காண்க.

25. ஒரு நான்முகியின் (Tetrahedron) மூலைகளை எதிர்ப்பக்க முக்கோணங்களின் நடுக்கோட்டுச் சந்திகளுடன் இணைக்கும் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவுக.

26. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்பன ஒரேதள அமைப்பிலாத வெக்டர்கள் எனில் $-6\overline{a}+3\overline{b}+2\overline{c}$; $3\overline{a}-2\overline{b}+4\overline{c}$; $5\overline{a}+7\overline{b}+3\overline{c}$, $-13\overline{a}+17\overline{b}-\overline{c}$, என்ற நிலைவெக்டர்களுடைய புள்ளிகள் ஒரேதளத்திலுள்ளன எனக் காட்டு.

27. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்பன ஒரேதள அமைப்பிலா வெக்டர்கள் எனில், $-2\overline{a}+3\overline{b}+5\overline{c}$; $\overline{a}+2\overline{b}+3\overline{c}$; $7\overline{a}-\overline{c}$ எனும் நிலைவெக்டர்களுடைய புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் உள்ளன எனக் காண்பி.

28. ஒரு நான்முகியின் எதிரெதிர் விளிம்புகளின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவுக.

29. $ABCD$ எனும் நான்முகியின் சராசரி மையம் G. $A'B'C'D'$ என்பது, AA', BB', CC', DD' என்பவைக்கு G நடுப் புள்ளியாயிருக்குமாறு அமைக்கப்பெற்ற வேறொரு நான்முகியாகும். $A'B'C'D'$-ன் சராசரி மையமும் G என்று நிறுவி.

30. ஓர் இணைகரத் திண்மத்தின் ஒரு முனையில் சந்திக்கும் மூன்று பக்கங்களின் அம்முனையில் சந்திக்கும் மூலைவிட்டங்கள் அவற்றின் நீளங்களில் பாதி அளவிற்கு நீட்டப்படுகின்றன. அவ்வாறு நீட்டப் பட்ட கோடுகளின் மறுமுனைகள் மூன்றும் எதிர் முனையும் ஒரே தளத்தில் அமையும் எனக் காண்பி.

31. ஓர் இணைகரத் திண்மத்தின் நான்கு மூலைவிட்டங்களும் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கும் எனவும், அப்புள்ளி ஒவ்வொரு மூலைவிட்டத்தையும் இரு சமக்கூறிடும் எனவும் நிறுவுக.

32. ΔABCயின் நடுக்கோடு ADயின் நடுப்புள்ளி E. BEயின் நீட்சி ACயை Fல் வெட்டுகிறது. $AF = \frac{1}{3}AC$ எனவும், $EF = \frac{1}{4}BF$ எனவும் காண்பி.

33. $ABCD$ என்பது ஓர் இணைகரம். L, M என்பன AB, CDயின் நடுப்புள்ளிகள். DL, BM என்பன ACயை முச்சமக் கூறிடும் எனவும், ACயால் முச்சமக்கூறிடப்படும் எனவும் நிறுவுக.

34. $-\overline{a}+4\overline{b}-3\overline{c}$, $3\overline{a}+2\overline{b}-5\overline{c}$; $-3\overline{a}+8\overline{b}-5\overline{c}$, $-3\overline{a}+2\overline{b}+\overline{c}$ எனும் நிலைவெக்டர்கள் கொண்ட புள்ளிகள் ஒரேதளத்தில் அமையும் எனக் காண்பி.

35. $\overline{a}-2\overline{b}+3\overline{c}$, $2\overline{a}+3\overline{b}-4\overline{c}$, $-7\overline{b}+10\overline{c}$ எனும் புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் உள்ளன எனக் காண்பி.

36. $ABCD$ ஓர் இணைகரம். P என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. $\overline{PA}+\overline{PC}=\overline{PB}+\overline{PD}$ எனக் காண்பி.

37. ABC எனும் முக்கோணத்தில் BC, CA, ABயின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே D, E, F எனில், $\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}=0$ என நிறுவுக.

38. ΔABCயில், G என்பது நடுக்கோட்டுச் சந்தி எனில், $\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}=0$ என நிறுவுக.

39. O, A, B, C என்பன மூவளவை வெளியில் அமைந்த ஏதோ நான்கு புள்ளிகள். G என்பது ΔABCயின் நடுக்கோட்டுச் சந்தி யெனில், $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=3\overline{OG}$ எனக் காண்பி. (து. பா. செப். 67)

40. $ABCD$ எனும் இணைகரத்தின் தளத்தில் O ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. X என்பது மூலைவிட்டங்களின் வெட்டும் புள்ளி. $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}=4\,\overline{OX}$ எனக் காண்பி.

41. ABC எனும் முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் L, M, N ஆகும். O என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{OL}+\overline{OM}+\overline{ON}$ எனக் காண்பி.

42. $ABCD$ ஓர் இணைகரம். BC, CDயின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே E, F எனில் $2\overline{AE}+2\overline{AF}=3\overline{AC}$ எனக் காண்பி.

43. ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணத்தின் ஒரு முனையில், அம்முனையை மற்ற முனைகளுக்குச் சேர்க்கும் கோடுகளின் திசைகளிலும், அக் கோடுகளின் நீளங்களுக்கு விகிதசமத்திலும் அமைந்த ஐந்து விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் இணைவாக்க விளைவு விசையைக் காண்க.

44. ABC எனும் ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டுச் சந்தி H எனவும், அதன் சுற்றுவட்டமையம் O எனவும் இருந்தால் $\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$ எனக் காண்பி. [து. பா. ஏப். 66]

45. $ABCDEF$ என்பது ஓர் ஒழுங்கு அறுகோணம். G அதன் சுற்றுவட்டமையம். O ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, $\overline{OF}$ என்ற விசைகளின் இணைவாக்க விளைவு விசை $6\overline{OG}$ எனக் காண்பி.

46. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்ற ஒரே ஆரம்ப முனையுடைய மூன்று வெக்டர் களின் முடிவுப் புள்ளிகள் ஒரேதளத்தில் அமைய என்ன கட்டுப்பாடு?

47. ஒரு நாற்கரத்தின் முனைகளின் நிலைவெக்டர்கள் $\overline{a}$, $\overline{b}$, $2\overline{a}+2\overline{b}$, $3\overline{a}+\overline{b}$ எனில் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக்கூறிடும் என நிறுவுக.

48. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $3\overline{a}-2\overline{b}$ எனும் நிலைவெக்டர்களுடைய மூன்று புள்ளி களும் ஒரு நேர்கோட்டில் உள்ளன என நிறுவுக. [து. பா. செப். 66]

49. $-6\overline{a}+3\overline{b}+2\overline{c}$, $3\overline{a}-2\overline{b}+4\overline{c}$, $5\overline{a}+7\overline{b}+3\overline{c}$, $-13\overline{a}+17\overline{b}-\overline{c}$ எனும் புள்ளிகள் ஒரேதளத்தில் அமைவன என நிறுவுக.

50. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்பன ஒரேதளத்திலில்லா வெக்டர்கள் எனில் $-\overline{a}+4\overline{b}-3\overline{c}$, $3\overline{a}+2\overline{b}-5\overline{c}$, $11\overline{a}-2\overline{b}-9\overline{c}$; ஒரேதள அமைப்புடையன என நிறுவுக.

51. $4i+5j+k$, $-j-k$, $3i+9j+4k$, $-4i+4j+4k$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரேதள அமைப்புடையன என நிறுவுக. [து.பா.ஏப். 61]

52. $5i+6j+7k$, $7i-8j+9k$, $3i+20j+5k$ என்பன ஒருதள அமைப்புடையன என நிறுவுக. [து. பா. செப். 63]

53. ஒரு படகு மணிக்கு 12 மைல் வேகத்தில் தெற்கு நோக்கிச் செல்கிறது. வேறொரு படகு மணிக்கு 5 மைல் வேகத்தில் மேற்கு நோக்கிச் செல்கிறது. இரண்டாவது படகைப் பொறுத்து, முதல் படகின் சார்புத் திசைவேகத்தின் அளவும் திசையும் காண்க.

54. மணிக்கு 6 மைல் வேகத்தில் ஒருவன் சைக்கிளில் செல்கிருன். மழைத்துளிகள் செங்குத்திலிருந்து 60° கோணச் சாய்வில் மணிக்கு 5 மைல் வேகத்தில் வீழ்வனபோல் அவனுக்குத் தோன்றினல், மழைத் துளியின் உண்மைத் திசைவேகம் என்ன ?

55. கிழக்கு நோக்கிச் செல்லும் ஒருவனுக்குக் காற்று வடகிழக்குத் திசையிலிருந்து வீசுவதுபோல் தோன்றுகிறது. ஆனல் அவன் வேகத்தினை இருமடங்காக்கினல் வடகிழக்கிலிருந்து $\cos^{-1}2$ என்ற கோணச் சாய்வில் கிழக்கு நோக்கிச் சரிந்துள்ள திசையிலிருந்து வீசுவதுபோலத் தோன்றினல், காற்றின் உண்மைத் திசைவேகம் என்ன ?

2. புள்ளிப் பெருக்கல்
(Dot product)

முன்னுரை

முந்திய பகுதியில் ஒரு வெக்டரைத் திசையிலி ஒன்றினுல் பெருக்கலாம் என்றும், அவ்வாறு பெருக்கினுல் கிடைப்பது அவ்வெக்டரின் தாங்கும் கோட்டிலேயே அமையும் வேருெரு வெக்டரைக் குறிக்கும் எனவும் அளவு மட்டிலும் வேறுபடும் என்றும் கண்டோம். பெருக்கும் எண் குறியீட்டில் மாறுபட்டால் திசை நேர் எதிராக மாறும் என்றும் கண்டோம். இங்கு இரு வெக்டர்களைப் பெருக்குதல் என்ருல் என்ன பொருள் என்று பார்க்கலாம்.

வடிவகணிதம், இயக்கவியல், இயற்பியல் போன்ற துறைகளில் இரு வெக்டர்கள் இணையும் முறையானது இருவகையான பெருக்கல்களை வரையறுக்குமாறு செய்கிறது. ஒரு பெருக்கலில் முடிவாகக்கிடைப்பது திசையிலி; மற்றதில் முடிவாகக்கிடைப்பது ஒரு வெக்டர். முன்னதைத் திசையிலிப் பெருக்கல் (Scalar product) என்றும் பிந்தியதை வெக்டர் பெருக்கல் (Vector product) என்றும் அழைக்கிறேம்.

எடுத்துக்கொண்ட இரு வெக்டர்களின் எண்ணளவுகளைச் சார்ந்து முடிவு அமைவதோடு, பங்கீட்டு விதியையும் (distributive law) பின்பற்றுவதாலேயே இவற்றைப் பெருக்கல் என அழைக்கிறேம். திசையிலிப் பெருக்கலை 'புள்ளிப் பெருக்கல்' (Dot product) என்றும், வெக்டர் பெருக்கலை 'குறுக்குப் பெருக்கல்' (Cross product) என்றும் அழைப்பதுண்டு.

§ 2·01. வரையறை : புள்ளிப் பெருக்கல்

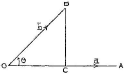
$\overline{a}$, $\overline{b}$ எனும் இரு வெக்டர்களுக்கிடைப்பட்ட கோணம் θ எனில் அவற்றின் திசையிலிப் பெருக்கலின் விளைவு $|\overline{a}|\,|\overline{b}|\cos\theta$ எனும் திசையிலி ஆகும். இதனை $\overline{a}\cdot\overline{b}$ என எழுதுகிறேம். படிக்கும்போது

$\overline{a}$ புள்ளி $\overline{b}$ என்று படிக்கிறோம். எனவேதான் இதனைப் புள்ளிப் பெருக்கல் எனவும் அழைப்பர்.

வரையறையிலிருந்து $\overline{b} \cdot \overline{a}$ என்பது $|\overline{b}|\,|\overline{a}| \cos\theta$ என்பதற்குச் சமம் எனத் தெரிகிறது. எனவே $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$ என்பது வெளிப்படை. அதாவது புள்ளிப்பெருக்கல் மாற்றுவிதியைப் பின்பற்றுகிறது.

மேலும் $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}|\,|\overline{b}| \cos\theta$ என்பதால், θ குறுங்கோணமானால் பெருக்கல் மிகை எண்ணும் (+), விரிகோணமானால் குறை எண்ணும் (−) இருக்கும்.

§ 2·02. விழலும் (Projection) புள்ளிப்பெருக்கலும்



படம் 37.

$\overline{OA} = \overline{a}$ எனவும் $\overline{OB} = \overline{b}$ எனவும் இருக்கட்டும். இரண்டுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க. Bயிலிருந்து OAக்குச் செங்குத்தாக BC வரைக.

செங்கோண $\triangle\, OBC$யிலிருந்து, OAயின் மீது OBயின்

$$\text{வீழல்} = OC$$
$$= OB \cos\theta$$
$$\text{மேலும் } \overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}|\,|\overline{b}| \cos\theta$$
$$= OA \,.\, OB \,.\, \cos\theta$$
$$= OA \,.\, OC.$$

எனவே புள்ளிப் பெருக்கற்பலனை "ஒரு வெக்டரின் எண்ணளவை, அவ்வெக்டரின்மேல் மற்ற வெக்டரின் வீழலைக்கொண்டு பெருக்கிய மதிப்பு" எனவும் வரையறுக்கலாம்.

புள்ளிப் பெருக்கலின் வரையறையிலிருந்து $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}|\,|\overline{b}| \cos\theta$ என்பதால், $\theta = 90°$ எனில் $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$ அதாவது $\overline{a}$யும் $\overline{b}$யும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானால் $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$ ஆகும். மறுதலையாக இரு வெக்டர்களின் புள்ளிப் பெருக்கற்பலன் 0 எனில் அவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாயிருக்கும்.

மேலும் $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}|\,|\overline{b}| \cos\theta$ என்பதால்,

$\cos\theta = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$ எனக் கிடைக்கும். இதனைக்கொண்டு இரு வெக்டர்களுக்கிடைப்பட்ட கோணத்தை மதிப்பிட இயலும்.

வழி முடிவு :

(i) $\overline{a}\cdot\overline{a} = |\overline{a}|^2$

(ii) i, j, k என்ற ஓரலகு வெக்டர்களை எடுத்துக்கொண்டால் $i.j = j.k = k.i = 0$. மேலும் $i.i = j.j = k.k = 1$.

(iii) பெருக்கலில் வரும் இரு வெக்டர்களில் ஏதேனும் ஒன்றினை ஒரு திசையிலி பெருக்கினால், பெருக்கல் முடிவையும் அத்திசையிலி பெருக்கும். அதாவது $(m\overline{a})\cdot\overline{b} = \overline{a}\cdot(m\overline{b}) = m(\overline{a}\cdot\overline{b})$.

(iv) இரு வெக்டர்கள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைவன எனில் அவற்றின் இடைப்பட்ட கோணம் 0° அல்லது 180° ஆகும். எனவே அவற்றின் புள்ளிப்பெருக்கற்பலன் அவ்வெக்டர்களின் நீளங்களைப் பெருக்கியதற்குச் சமமாகும். வெக்டர்கள் ஒரே திசை நோக்கியிருந்தால், பெருக்கல் + ஆகவும், எதிர்த்திசைகளிலிருந்தால் − ஆகவும் அமையும்.

(v) புள்ளிப் பெருக்கற்பலன் வெறும் எண்தான்; ஆகையால் ஒரு வெக்டரின் கெழுவாகக் கூட வரும்.

§ 2·03. ஒரு கோட்டின்மேல் ஒரு வெக்டரின் வீழல்

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோட்டின் மேல் ஒரு வெக்டரின் வீழலைக் காண அக்கோட்டின் திசையில் அமையும் ஓரலகு வெக்டரினைக் கண்டு, அதனுடன் கொடுக்கப்பட்ட வெக்டரைப் புள்ளிப் பெருக்கல் எடுக்க வேண்டும்.

இம்முறையைப் பின்பற்றி ஒரு வெக்டரைக் குறிப்பிட்ட ஒரு திசையிலும் அதற்குச் செங்குத்தான திசையிலும் கூறுகளாய்ப் பிரிக்கலாம். கொடுக்கப்பட்ட திசையில் உள்ள ஓரலகு வெக்டர் $\hat{a}$ என்க. கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர் $\overline{r}$ என்க. $\overline{r}$ன் வீழல் $\hat{a}$யில் $\overline{r}\cdot\hat{a}$ ஆகும்.

எனவே அத்திசையில் வெக்டர்கூறு $(\overline{r}\cdot\hat{a})\,\hat{a}$ ஆகும். செங்குத்துத் திசையில் அமையும் வெக்டர் $\overline{x}$ என்றால்,

$$\overline{r} = (\overline{r}\cdot\hat{a})\,\hat{a} + \overline{x}$$

$$\therefore\ \overline{x} = \overline{r} - (\overline{r}\cdot\hat{a})\,\hat{a}.$$

இதேபோல் மூவளவை வெளியில் அமைந்த ஒரு வெக்டர் $\overline{r}$ஐ ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று அச்சுக்களில் கூறுகளாய்ப் பிரிக்கலாம்.

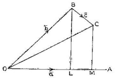
x அச்சின் வழியமைந்த ஓரலகு வெக்டர் i

எனவே $\overline{r}$ன் கூறு x அச்சின் வழி $(\overline{r}\cdot i)\ i$

இதே போன்று y அச்சின் வழி $(\overline{r},\ j)\ j$, z அச்சின் வழி $(\overline{r}\cdot k)\ k$

$\therefore\ \ \overline{r} = (\overline{r}\cdot i)\ i + (\overline{r}\cdot j)\ j + (\overline{r}\cdot k)\ k.$

பங்கீட்டு விதி: புள்ளிப் பெருக்கல் பங்கீட்டு விதியைப் பின்பற்றுகிறது. அதாவது $\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$.



படம் 38.

படத்தில் $\overline{OA}=\overline{a}$; $\overline{OB}=\overline{b}$;
$\overline{BC} = \overline{c}$;
எனவே $\overline{OC} = \overline{OB}+\overline{BC}$
$= \overline{b}+\overline{c}$.

OAக்கு BL, CM எனும் செங்குத்துக் கோடுகள் வரை. OL, LM, OM என்பன OAயின் மேல் முறையே OB, BC, OC ஆகியவற்றின் வீழல்கள் ஆகும்.

$$\text{எனவே } \overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\cdot\overline{OC}$$
$$= |\overline{a}|\ OM$$
$$= |\overline{a}|\ (OL+LM)$$
$$= |\overline{a}|\ OL + |\overline{a}|\ LM$$
$$= \overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}.$$

இங்கு $\overline{b}$, $\overline{c}$ ஆகியவற்றின் வீழல்கள் மிகையாக இருக்குமாறு படம் வரைந்திருந்தபோதிலும், குறையெண்ணாக அவை அமைந்தாலும் இம்மாதிரி நிறுவ இயலும். இம்முடிவை இன்னும் விரிவாக்கலாம்.

$$(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\dots)\cdot(\overline{p}+\overline{q}+\overline{r}+\dots)$$
$$= (\overline{a}\cdot\overline{p}+\overline{a}\cdot\overline{q}+\overline{a}\overline{r}+\dots)+(\overline{b}\cdot\overline{p}+\overline{b}\cdot\overline{q}+\dots)$$
$$+(\overline{c}\cdot\overline{p}+\overline{c}\cdot\overline{q}+\overline{c}\cdot\overline{r}+\dots)+(\quad)\dots$$

என நிறுவலாம்.

வழி முடிவுகள்:

(i) $(\overline{a}+\overline{b})\cdot(\overline{a}+\overline{b}) = \overline{a}^2+2\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}^2$

(ii) $(\overline{a}-\overline{b})\cdot(\overline{a}+\overline{b}) = \overline{a}^2-2\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}^2$

(iii) $(\overline{a}+\overline{b})\cdot(\overline{a}-\overline{b}) = \overline{a}^2-\overline{b}^2$.

(iv) $\overline{a}=a_1i+a_2j+a_3k$, எனவும், $\overline{b}=b_1i+b_2j+b_3k$ எனவும் பிரிக்கப்பட்டு எழுதப்பட்டால்,

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = (a_1i+a_2j+a_3k)\cdot(b_1i+b_2j+b_3k)$$
$$= a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \text{ ஆகும்.}$$

(v) $\overline{a} = a_1i+a_2j+a_3k$, $\overline{b} = b_1i+b_2j+b_3k$, வெக்டர்களுக்கிடைப்பட்ட கோணம் θ எனில்

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\ \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} \text{ ஆகும்.}$$

ஏனெனில் $\cos\theta = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$

திரிகோண கணிதத்திலும் வடிவ கணிதத்திலும் இப்புள்ளிப் பெருக்கல் எவ்வெவ்வாறு பயன்படுகிறது என்பதனை விளக்கச் சில கணக்குகள் கீழே செய்து காட்டப் பட்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 1: $2i-j+k$, $i-3j-5k$, $3i-4j-4k$, என்ற புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை உருவாக்கும் என நிறுவுக.

Aயின் நிலைவெக்டர் $2i-j+k$

Bயின் நிலைவெக்டர் $i-3j-5k$

Cயின் நிலைவெக்டர் $3i-4j-4k$ என்க.

$\overline{AB} = -i-2j-6k$, $\overline{BC} = 2i-j+k$

$\overline{AC} = i-3j-5k$

$\overline{AC}\cdot\overline{BC} = (i-3j-5k)\cdot(2i-j+k)$

$= 2+3-5 = 0$

$\therefore$ AC, BCக்குச் செங்குத்து

அதாவது ABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2: வழக்கமான குறியீட்டின்படி ஒரு முக்கோணம் ABCயில் $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ என நிறுவுக.

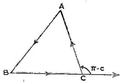
ΔABCயில் $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$.

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0.$

$\therefore\ -\overline{AB}=\overline{BC}+\overline{CA}$

$\therefore\ (-\overline{AB})\cdot(-\overline{AB}) = (\overline{BC}+\overline{CA})\cdot(\overline{BC}+\overline{BA})$

ஆனால் $(-\overline{AB})\cdot(-\overline{AB})=\overline{AB}^2$
$= |\overline{AB}|^2 = c^2$



படம் 39.

மேலும் $(\overline{BC}+\overline{CA})\cdot(\overline{BC}+\overline{CA})$

$$= \overline{BC}^2+\overline{CA}^2+2\overline{BC}\cdot\overline{CA}$$
$$= |\overline{BC}|^2+|\overline{CA}|^2+2|\overline{BC}||\overline{CA}|\cos(\pi-C)$$
$$= a^2+b^2+2ab\cos(\pi-C)$$
$$= a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$\therefore\ c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C.$$

எடுத்துக்காட்டு 3 : $|\overline{a}+\overline{b}| = |\overline{a}-\overline{b}|$ எனில் $\overline{a}$யும் $\overline{b}$யும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என நிறுவுக.

$$|\overline{a}+\overline{b}| = |\overline{a}-\overline{b}|$$
$$\therefore\ |\overline{a}+\overline{b}|^2 = |\overline{a}-\overline{b}|^2$$
$$\text{i.e. } (\overline{a}+\overline{b})\cdot(\overline{a}+\overline{b}) = (\overline{a}-\overline{b})\cdot(\overline{a}-\overline{b})$$
$$\text{i.e. } |\overline{a}|^2+|\overline{b}|^2+2\,\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|^2+|\overline{b}|^2-2\,\overline{a}\cdot\overline{b}.$$
$$\therefore\ 4\,\overline{a}\cdot\overline{b} = 0.$$
$$\text{i.e. } \overline{a}\cdot\overline{b} = 0.$$

அதாவது $\overline{a}$, $\overline{b}$க்குச் செங்குத்து.

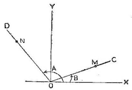
எடுத்துக்காட்டு 4 : $\hat{a}$, $\hat{b}$ என்பன ஓரலகு வெக்டர்கள் எனவும் அவற்றிற்கிடைப்பட்ட கோணம் θ எனவும் இருந்தால் $\sin\frac{\theta}{2}=|\frac{1}{2}\hat{a}-\hat{b}|$ எனக் காண்பி.

$$(\hat{a}-\hat{b})\cdot(\hat{a}-\hat{b}) = \hat{a}^2+\hat{b}^2-2\hat{a}\cdot\hat{b}.$$
$$= 1+1-2\cos\theta.$$
$$= 2(1-\cos\theta)$$
$$= 4\sin^2\frac{\theta}{2}.$$
$$|\hat{a}-\hat{b}|^2 = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$$
$$\therefore\ \sin\frac{\theta}{2} = \tfrac{1}{2}|\hat{a}-\hat{b}|.$$

எடுத்துக்காட்டு 5 : $\cos(A-B) = \cos A\cos B+\sin A\sin B$ எனும் வாய்பாட்டை வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

OX, OY என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு நேர்கோடுகள். $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ என்பன முறையே OX, OY வழி அமைந்த ஓரலகு வெக்டர்கள். OC, OD என்பன $\angle COX=\angle B$, $\angle DOX=\angle A$ எனுமாறு

அமைந்த கோடுகள் என்க. OM, ON, என்பன முறையே OC, ODயில் அமைந்த ஓரலகு வெக்டர்கள்.



படம் 40.

அப்படியானால் $\overline{OM}\cdot\overline{ON} = 1\cdot 1\cdot \cos(A-B)$ {புள்ளிப் பெருக்கலின் வரையறைப்படி}

$$\text{மேலும் } \overline{OM} = (OM\cos B)i + (OM\sin B)j$$
$$= i\cos B + j\sin B. \quad (\because OM=1)$$
$$\text{இதே போல் } \overline{ON} = ON\cos A\, i + ON\sin A\, j$$
$$= i\cos A + j\sin A. \quad (\because ON=1)$$
$$\therefore \overline{OM}\cdot\overline{ON} = (i\cos B + j\sin B)\cdot(i\cos A + j\sin A)$$
$$= \cos A\cos B + \sin A\sin B$$
$$\therefore \cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B.$$

எடுத்துக்காட்டு 6 : $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்பன ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாகவும் அளவில் சமமானதாயும் அமைந்த மூன்று வெக்டர்கள் எனில், $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$ எனும் வெக்டர் $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ மூன்றிற்கும் சமமான கோணச்சாய்வில் அமைந்துள்ளது என நிறுவுக.

$|\overline{a}| = |\overline{b}| = |\overline{c}|$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாகையால்

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{c} = \overline{c}\cdot\overline{a} = 0.$$
$$\text{மேலும் } \overline{a}\cdot\overline{a} = \overline{b}\cdot\overline{b} = \overline{c}\cdot\overline{c} = |\overline{a}|^2$$
$$\therefore (\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})\cdot\overline{a} = \overline{a}\cdot\overline{a} + \overline{b}\cdot\overline{a} + \overline{b}\cdot\overline{a} + \overline{c}\cdot\overline{a}$$
$$= \overline{a}\cdot\overline{a} = |\overline{a}|^2$$

ஆனால் $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$யின் நீளம் $= |\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}|$

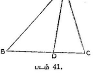
$$= \sqrt{|\overline{a}|^2+|\overline{b}|^2+|\overline{c}|^2}$$
$$= \sqrt{|\overline{a}|^2+|\overline{a}|^2+|\overline{a}|^2}$$
$$= \sqrt{3}\,|\overline{a}|.$$

$\therefore$ $(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})\cdot\overline{a} = \sqrt{3}|\overline{a}|\ |\overline{a}|\ \cos\theta_1$; θ_1 என்பது $\overline{a}$க்கும் $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$க்கும் இடைப்பட்ட கோணம்.

$$\therefore \cos\theta_1 = \frac{(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})\cdot\overline{a}}{\sqrt{3}\,|\overline{a}|^2}$$
$$= \frac{1\,|\overline{a}|^2}{\sqrt{3}\,|\overline{a}|^2}.$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

இதேபோல் $(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})\cdot\overline{b}$ எடுத்து $\cos\theta_2$ கண்டாலும் $(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})\cdot\overline{c}$ எடுத்து $\cos\theta_3$ கண்டாலும், ஒவ்வொன்றும் $\frac{1}{\sqrt{3}}$ என்றே கிடைக்கும். அதாவது $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$ எனும் வெக்டர், $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ மூன்றுடனும் $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ எனும் கோணச் சாய்வில் அமைந்துள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 7: ABC எனும் முக்கோணத்தில் D என்பது BCயின் நடுப்புள்ளியெனில் $AB^2+AC^2=2(BD^2+AD^2)$ எனக் காண்பி.



படம் 41.

முக்கோணம் ABCயில்

$$\overline{AB} = \overline{c},$$
$$\overline{AC} = \overline{b} \text{ என்க.}$$

அவற்றின் நீளங்கள் முறையே **c**, b ஆகும்.

ஆனால் BCயின் நடுப்புள்ளி D ஆகையால்,

$$\overline{AB}+\overline{AC} = 2\,\overline{AD}$$
$$\therefore \overline{AD} = \frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2}$$
$$= \frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}$$

$$\overline{BD} = \overline{AD}-\overline{AB}$$
$$= \frac{\overline{b}+\overline{c}}{2} - \overline{c} = \frac{\overline{b}-\overline{c}}{2}$$

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2 = c^2+b^2$$
$$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2 = \left(\frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}\right)^2+\left(\frac{\overline{b}-\overline{c}}{2}\right)^2$$
$$= 2\,\frac{(\overline{b}^2+\overline{c}^2)}{4}$$
$$= \frac{\overline{b}^2+\overline{c}^2}{2}.$$
$$\therefore\ \overline{AB}^2+\overline{AC}^2 = 2\,(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2).$$

அதாவது $AB^2+AC^2 = 2\,(AD^2+BD^2)$.

எடுத்துக்காட்டு 8: ஒரு முக்கோணம் ABCயில் வழக்கமான குறியீடுகளுடன் $c = b\cos A+a\cos B$ என நிறுவுக.

$\overline{AB}=\overline{c}$, $\overline{BC}=\overline{a}$, $\overline{AC}=\overline{b}$ என்க.

$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$

i. e. $\overline{c}+\overline{a}=\overline{b}$

$\therefore\ \overline{c}=\overline{b}-\overline{a}$

$\therefore\ \overline{c}\cdot\overline{c}=(\overline{b}-\overline{a})\cdot(\overline{b}-\overline{a})=\overline{c}\cdot(\overline{b}-\overline{a})$

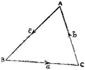
i. e. $c^2=\overline{b}\cdot\overline{c}-\overline{a}\cdot\overline{c}$.

$=bc\cos A-ac\cos(\pi-B)$.

$=bc\cos A+ac\cos B$.

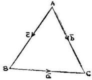
முழுதும் cஆல் வகுக்க,

$c = b\cos A+a\cos B$.



படம் 42.

எடுத்துக்காட்டு 9: ΔABCயில் (i) $ab\cos C-bc\cos A = a^2-c^2$ எனவும் (ii) $2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C) = a^2+b^2+c^2$ எனவும் நிறுவுக.



படம் 43.

முக்கோணம் ABCயில்,

$\overline{AB}=\overline{c}$, $\overline{BC}=\overline{a}$, $\overline{CA}=\overline{b}$ என்க.

$\therefore\ \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=0$ (1)

$\overline{a}\cdot\overline{b} = ab\cos(\pi-C)$

$= -ab\cos C$ (2)

$\overline{b}\cdot\overline{c} = -bc\cos A$ (3)

$\overline{c}\cdot\overline{a} = -ca\cos B$ (4)

(3)—(2), $ab\cos C - bc\cos A$

$= \overline{b}\cdot\overline{c}-\overline{a}\cdot\overline{b}$

$= \overline{b}\cdot(\overline{c}-\overline{a})$.

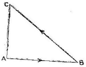
மேலும் $\overline{b} = -(\overline{a}+\overline{c})$ (1ல் இருந்து).

$$\therefore\ ab\cos C - bc\cos A = -(\overline{c}+\overline{a})\cdot(\overline{c}-\overline{a})$$
$$= -(|\overline{c}|^2-|\overline{a}|^2)$$
$$= a^2-c^2$$

(ii) $2[bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C]$

$$= -2[\overline{b}\cdot\overline{c}+\overline{c}\cdot\overline{a}+\overline{a}\cdot\overline{b}]\ \{(2),(3),(4)\text{ல் இருந்து}\}$$
$$= -2[\overline{b}\cdot\overline{c}+2\overline{c}\cdot\overline{a}+2\overline{a}\cdot\overline{b}]$$
$$= -[\overline{b}\cdot\overline{c}+\overline{c}\cdot\overline{a}+\overline{c}\cdot\overline{a}+\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}\cdot\overline{c}]$$
$$= -[\overline{c}\cdot(\overline{b}+\overline{a})+\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})+\overline{b}\cdot(\overline{c}+\overline{a})]$$
$$= -[-\overline{c}\cdot\overline{c}-\overline{a}\cdot\overline{a}-\overline{b}\cdot\overline{b}]\ ((1)\text{ல் இருந்து})$$
$$= c^2+a^2+b^2.$$

எடுத்துக்காட்டு 10 : ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் இருபடி, மற்ற இரு பக்கங்களின் இரு படிகளின் கூட்டலுக்குச் சமம் என நிறுவுக.



படம் 44.

ΔABCயில் $\angle A = 90°$

$\therefore\ AB, AC$க்குச் செங்குத்து.

$\therefore\ \overline{AB}\cdot\overline{AC}=0$

மேலும் $\overline{BC}=\overline{AC}-\overline{AB}$

$$\therefore\ \overline{BC}\cdot\overline{BC} = (\overline{AC}-\overline{AB})\cdot(\overline{AC}-\overline{AB})$$
$$= \overline{AC}^2+\overline{AB}^2-2\overline{AC}\cdot\overline{AB}$$
$$= \overline{AC}^2+\overline{AB}^2$$

i. e. $|\overline{BC}|^2=|\overline{AC}|^2+|\overline{AB}|^2$

i. e. $BC^2 = AC^2+AB^2$

எடுத்துக்காட்டு 11 : ஓர் இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்களின் இருபடிகளின் வேறுபாடு, அதன் ஒரு பக்கமும், அப்பக்கத்தின்மேல் அடுத்த பக்கத்தின் வீழலும் பெருக்கிய மதிப்பினைப்போல் நான்கு மடங்கு என நிறுவுக.

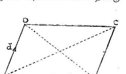
$ABCD$ ஓர் இணைகரம். Aயினை ஆதியாய்க் கொண்டு B, Dயின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\overline{b}$, $\overline{d}$ என்க.

$\therefore\ \overline{BC}=\overline{AD}=\overline{d}$

$\therefore\ C$யின் நிலைவெக்டர்

$=\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$

$=\overline{a}+\overline{d}$



படம் 45.

$$\text{மேலும் } \overline{AB}+\overline{BD} = \overline{AD}$$

$$\therefore \quad \overline{BD} = \overline{AD}-\overline{AB}$$

$$= \overline{d}-\overline{a}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AC}\cdot\overline{AC} \qquad = (\overline{a}+\overline{d})\cdot(\overline{a}+\overline{d}) = \overline{a}^2+\overline{d}^2+2\overline{a}\cdot\overline{d}$$

$$\overline{BD}^2 = (\overline{d}-\overline{a})\cdot(\overline{d}-\overline{a}) = \overline{d}^2+\overline{a}^2-2\overline{d}\cdot\overline{a}$$

$$\therefore \quad \overline{AC}^2-\overline{BD}^2 = 2\overline{a}\cdot\overline{d}+2\overline{a}\cdot\overline{d}$$

$$= 4\overline{a}\cdot\overline{d}$$

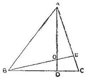
ஆனால் $\overline{a}\cdot\overline{d}$ என்பது $AB \, . \, AD \cos A$

$= AB$ {ABயின் மேல் ADயின் வீழல்}

$\therefore \; AC^2 - BD^2 = 4AB$ (ABயின் மீது ADயின் வீழல்)

எடுத்துக்காட்டு 12: ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகளிலிருந்து எதிர்ப்பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவுக.

ΔABCயில், AD, BE, CF என்பன எதிர்ப் பக்கங்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள். இவற்றில் ADயும் BEயும் Oவில் வெட்டுவதாய்க் கொள்வோம். Oவினை ஆதியாய்க் கொண்டு A, B, C களின் நிலைவெக்டர்கள் $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்க.



படம் 46.

$$\overline{BC} = \overline{c}-\overline{b}; \quad \overline{OA} = \overline{a}$$

$OA \perp BC$ ஆகையால் $\overline{a}\cdot(\overline{c}-\overline{b}) = 0$

$$\text{i.e. } \overline{a}\cdot\overline{c} = \overline{a}\cdot\overline{b} \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$OB = \overline{b}; \; \overline{CA} = \overline{a}-\overline{c};$$

மேலும் OB, CAக்குச் செங்குத்து.

$$\therefore \; \overline{b}\cdot(\overline{a}-\overline{c}) = 0$$

$$\text{i.e. } \overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{c} \qquad \ldots\ldots(2)$$

(1), (2)ல் இருந்து $\overline{a}\cdot\overline{c} = \overline{b}\cdot\overline{c}$

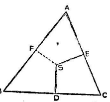
$$\text{i.e. } (\overline{a}-\overline{b})\cdot\overline{c} = 0$$

$$\text{i.e. } \overline{BA}\cdot\overline{OC} = 0$$

அதாவது COவின் நீட்சி ABக்குச் செங்குத்து.

$\therefore$ மூன்று குத்துக்கோடுகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 13 : ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் மையக்குத்துக் கோடுகளும் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கும் எனக் காண்பி.



படம் 47.

Δ ABCயில், BC, CA, ABகளின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே D, E, F என்க. BC, CAயின் நடுக்குத்துக் கோடுகள் Sல் வெட்டட்டும்.

$SD \perp^r BC$, $SE \perp AC$

ABயின் நடுப்புள்ளியான F உடன் Sஐ இணைக்கும் கோடு ABக்குச் செங்குத்து என நிறுவி னால், மூன்று பக்கங்களின் நடுக் குத்துக் கோடுகளும் ஒரு புள்ளி யில் சந்திக்கும் என்பது நிறுவப் படும்.

Sஐ ஆதியாய்க் கொண்டு A, B, Cகளின் நிலைவெக்டர்கள் $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்க. BCயின் நடுப்புள்ளி

$$D\text{யின் நிலைவெக்டர்} = \frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}$$

$$E\text{யின் நிலைவெக்டர்} = \frac{\overline{c}+\overline{a}}{2}$$

$$SD \perp BC \text{ ஆகையால் } \left(\frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}\right)\cdot(\overline{c}-\overline{b}) = 0$$

i.e. $\overline{c}^2 - \overline{b}^2 = 0$ ......(1)

இதேபோல் $SE \perp CA$ ஆகையால் $\overline{a}^2 - \overline{c}^2 = 0$ எனக் காட்டலாம். ......(2)

(1), (2)ல் இருந்து $\overline{a}^2 = \overline{b}^2 = \overline{c}^2$

i.e. $\overline{b}^2 - \overline{a}^2 = 0$

i.e. $\left(\frac{\overline{b}+\overline{a}}{2}\right)\cdot(\overline{b}-\overline{a}) = 0$ எனவும் எழுதலாம்.

அதாவது $SF \perp^r AB$ என நிறுவப்படுகிறது.

$\therefore$ மூன்று பக்கங்களின் நடுக்குத்துக் கோடுகளும் ஒரு புள்ளியிற் கூடும்.

எடுத்துக்காட்டு 14 : ஒரு நான்முகியில் இரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் குத்துக் கோடுகளாயிருந்தால், மூன்றாவது சோடி எதிர்ப்

பக்கங்களும் குத்துக் கோடுகளாகும் எனவும், எதிர்ப் பக்கங்களின் இருபடிகளின் கூட்டல் மூன்று சோடிகளுக்கும் சமம் எனவும் நிறுவுக.

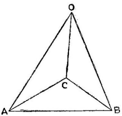
$OABC$ என்பது ஒரு நான்முகி. Oவினை ஆதியாய்க் கொண்டு A, B, Cகளின் நிலைவெக்டர்கள் $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ என்க.

$\overline{OA}=\overline{a}$; $\overline{OB}=\overline{b}$, $\overline{OC}=\overline{c}$

$\therefore$ $\overline{BC}=\overline{c}-\overline{b}$; $\overline{CA}=\overline{a}-\overline{c}$;

$\overline{AB}=\overline{b}-\overline{a}$;

OA, BC; OB, CA; என்ற இருசோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் குத்துக் கோடுகள் என்க.



படம் 48.

$\therefore$ $\overline{OA}\cdot\overline{BC}=0$; $\overline{OB}\cdot\overline{CA}=0$

அதாவது $\overline{a}\cdot(\overline{c}-\overline{b})=0$; $\overline{b}\cdot(\overline{a}-\overline{c})=0$

அதாவது $\overline{a}\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{b}$; $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{c}$

$\therefore$ $\overline{a}\cdot\overline{c}=\overline{b}\cdot\overline{c}$

i.e. $(\overline{a}-\overline{b})\cdot\overline{c}=0$

அதாவது $\overline{OC}\cdot(\overline{BA})=0$

அதாவது OC, AB என்ற மூன்றாவது சோடி எதிர்ப் பக்கங்களும் குத்துக் கோடுகளாகும்.

மேலும் $OA^2+BC^2=\overline{OA}^2+\overline{BC}^2$

$=\overline{a}\cdot\overline{a}+(\overline{c}-\overline{b})\cdot(\overline{c}-\overline{b})$

$=\overline{a}^2+\overline{b}^2+\overline{c}^2-2\,\overline{b}\cdot\overline{c}$

இதே போல் $OB^2+CA^2=\overline{a}^2+\overline{b}^2+\overline{c}^2-2\,\overline{c}\cdot\overline{a}$

$OC^2+AB^2=\overline{a}^2+\overline{b}^2+\overline{c}^2-2\,\overline{a}\cdot\overline{b}$

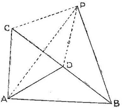
எனவும் கிடைக்கும்.

ஆனால் $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{c}=\overline{c}\cdot\overline{a}$ என்பதனால் மேற்கண்ட மூன்று மதிப்புகளும் சமம்.

$\therefore$ $OA^2+BC^2=OB^2+CA^2$

$=OC^2+AB^2$

எடுத்துக்காட்டு 15: ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் மூன்று முனைகளிலிருந்தும் சம தூரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியை, கர்ணத்தின் நடுப்புள்ளியுடன் இணைக்கும் கோடு அம்முக் கோணத்தின் தளத்திற்குச் செங்குத்து என நிறுவுக.



படம் 49.

ABC என்பது செங்கோண $\triangle$. $\angle A = 90°$, கர்ணம் BCயின் நடுப்புள்ளி D. P எனும் புள்ளி $PA = PB = PC$ எனும்படி அமைந்துள்ளது. Pயினை ஆதியாய்க் கொண்டு A, B, Cயின் நிலை வெக்டர்கள் $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ என்க.

$\therefore$ Dயின் நிலை வெக்டர் $\dfrac{\overline{b}+\overline{c}}{2}$.

ABக்கு AC செங்குத்தாகையால்,

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \quad \text{i.e. } (\overline{b}-\overline{a}) \cdot (\overline{c}-\overline{a}) = 0.$$

$$\text{i.e. } \overline{b} \cdot \overline{c} - \overline{b} \cdot \overline{a} - \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{a}^2 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

$$\overline{PD} = \frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}$$

$$\overline{AD} = \frac{\overline{b}+\overline{c}}{2} - \overline{a}.$$

$$\overline{PD} \cdot \overline{AD} = \frac{(\overline{b}+\overline{c}) \cdot (\overline{b}+\overline{c}-2\overline{a})}{4}$$

$$= \frac{\overline{b}^2 + \overline{c}^2 + 2\,\overline{b} \cdot \overline{c} - 2\,\overline{a} \cdot \overline{b} - 2\,\overline{a} \cdot \overline{c}}{4}$$

$$= \frac{\overline{b}^2 + \overline{c}^2 - 2\overline{a}^2}{4} \quad \text{[(1)ல் இருந்து]}$$

ஆனால் $|\overline{b}| = |\overline{c}| = |\overline{a}|$

$\therefore$ $\overline{b}^2 + \overline{c}^2 - 2\overline{a}^2 = 0.$

$\therefore$ PD, ADக்குச் செங்குத்து.

$$\overline{BC} = \overline{c} - \overline{b},$$

$$\overline{PD} = \frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}$$

$\therefore\ \overline{BC}\cdot\overline{PD} = (\bar{c}-\bar{b})\cdot\dfrac{(\bar{b}+\bar{c})}{2}$

$= \dfrac{\bar{c}^2-\bar{b}^2}{2}$

$= 0.\ (\because |\bar{c}| = |\bar{b}|)$

$\therefore$ PD, BCக்கும் செங்குத்து.

இவ்வாறு ஒரே தளத்திலுள்ள இரு கோடுகளுக்கு PD, செங்குத்தாயிருப்பதால் அத்தளத்திற்கே செங்குத்தாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 16 : $2i+j+k$, $3i+2j-k$ எனும் வெக்டர்களுக்குச் செங்குத்தாய் அமைந்த ஓரலகு வெக்டர் ஒன்று காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்கள் $2i+j+k$, $3i+2j-k$.

இவற்றிற்குச் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர் $xi+yj+zk$ என்க.

$\therefore\ x^2+y^2+z^2=1$......(1) (எண்ணளவு 1 ஆகையால்)

மேலும் $(2i+j+k)\cdot(xi+yj+zk) = 0$

i.e. $2x+y+z=0$ ....(2)

& $(3i+2j-k)\cdot(xi+yj+zk) = 0$

i.e. $3x+2y-z=0$ ....(3)

(1), (2), (3) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து x, y, z ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காணலாம்.

(2), (3)ல் இருந்து,

$\dfrac{x}{-1-2}=\dfrac{y}{3+2}=\dfrac{z}{4-3}=k$ என்க.

$\therefore\ x=-3k,\ y=5k,\ z=k$

$\therefore$ (1)ல் பிரதியிட

$9k^2+25k^2+k^2=1$

i.e. $k^2 = \frac{1}{35}$

$\therefore\ k = \dfrac{1}{\sqrt{35}}$

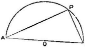
$\therefore\ x = -\dfrac{3}{\sqrt{35}},\ y = \dfrac{5}{\sqrt{35}},\ z = \dfrac{1}{\sqrt{35}}.$

$\therefore$ வேண்டப் பெற்ற வெக்டர் $= \dfrac{-3i+5j+k}{\sqrt{35}}.$

குறிப்பு : பின்னர் 'வெக்டர் பெருக்கல்' முறைபற்றிப் படித்த பின், கொடுக்கப்பட்ட இரு வெக்டர்களுக்குச் செங்குத்தான ஓரலகு

வெக்டரைக் காணும் முறை விளக்கப்படும். அம்முறை இங்குப் பயன் படுத்தப் பெற்றதைக் காட்டிலும் எளிதாயிருக்கக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 17: ஓர் அரை வட்டத்திலுள்ள கோணம் செங்கோணம் எனக் காண்பி.



படம் 50.

ABயை விட்டமாய்க் கொண்ட அரைவட்டப் பரிதியில் P ஒரு புள்ளி. ABயின் நடுப்புள்ளி Oவை ஆதியாய்க் கொண்டு Aயின் நிலைவெக்டர் $\overline{OA}=\overline{a}$ எனவும், $\overline{OP}=\overline{p}$ எனவும் கொள்க. OB, OAக்குச் சமமாய் ஆனால் எதிர்த் திசையிலுள்ளமையால்

$$\overline{OB} = -\overline{OA} = -\overline{a}$$

$$\therefore\ \overline{AP} = \overline{OP}-\overline{OA}$$

$$= \overline{p}-\overline{a}.$$

$$\overline{PB} = \overline{OB}-\overline{OP}$$

$$= -\overline{a}-\overline{p}.$$

$$\therefore\ \overline{AP}\cdot\overline{PB} = -(\overline{a}+\overline{p})\cdot(\overline{p}-\overline{a})$$

$$= -(\overline{p}^2-\overline{a}^2)$$

$$\text{ஆனால் } |\overline{p}| = OP = OA = |\overline{a}|$$

$$\therefore\ \overline{AP}\cdot\overline{PB} = 0$$

அதாவது $\angle APB = 90°$. இது Pயின் எல்லா நிலைகளுக்கும் பொருந்தும்.

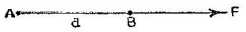
எனவே அரைவட்ட வில்லில் வட்டத்தின் விட்டம் தாங்கும் கோணம் $90°$ ஆகும்.

§ 2·04. இயக்க வியலில் புள்ளிப் பெருக்கலின் பயன்

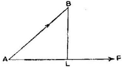
ஒரு விசை செய்யும் வேலை அளவைக் காணுதல் (work done by a force):

அறுதியிட்ட வெக்டருக்கு (localised vector) விசை ஒரு சிறந்த எடுத்துக்காட்டாகும். ஒரு விசை, ஒரு துகளின்மேல் செயல்படும் போது, அத்துகள், அவ்விசையின் திசையில் எவ்வளவு தூரம் நகர்த்தப் பெறுகிறதோ, அத்தூரத்தினையும், 'அவ்விசையின் அளவினையும் பெருக்கிய மதிப்பைத்தான் அவ்விசை செய்த வேலை (work done by that force) என்கிறோம். சில நேரங்களில் விசை செயல்படுகின்ற புள்ளியானது, விசை செயல்படும் திசையில் நகராமல், அக்கோட்டுடன்

ஏதோ ஒரு கோணச் சாய்வில் அமைந்த வேறொரு கோட்டில் நகரலாம். அப்போது விசையின் திசையில் அத்துகளின் உண்மை இடப்பெயர்ச்சி யின் வீழலேயும், விசையளவையும் பெருக்கிக் கிடைப்பது அவ்விசை செய்யும் வேலையெனப்படும்.



படம் 51. (i)



படம் 51. (ii)

புள்ளிப் பெருக்கலில் ஒரு வெக்டரின் எண்ணளவை, அவ்வெக்டரின் மேல் அடுத்த வெக்டரின் வீழல் கொண்டு பெருக்குகிறோம். ஆதலால் $\overline{F}$ என்ற விசை வெக்டரையும் $\overline{AB}$ என்ற இடப்பெயர்ச்சி வெக்டரையும் புள்ளிப் பெருக்கல் எடுத்தால் (F) (AL) என்ற மதிப்புக் கிடைக்கும் (படம் 51 (ii)). அதாவது F எனும் விசை செய்யும் வேலை அளவு கிடைக்கும். எனவே வெக்டர் முறையில் ஒரு விசை செய்யும் வேலை அளவைக் கணக்கிட விசை வெக்டருடன், விசை செயல்படும் புள்ளியின் இடப்பெயர்ச்சி வெக்டரைக் கொண்டு புள்ளிப் பெருக்கல் செய்ய வேண்டும். இடப்பெயர்ச்சி வெக்டர் காண, முடிவுப்புள்ளியின் நிலைவெக்டரிலிருந்து முதலில் செயல்படும் புள்ளியிருந்த நிலையின் நிலைவெக்டரைக் கழிக்கவேண்டும்.

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விசைகள் ஒரு புள்ளியிற் செயல்படுமானல், அவை ஒவ்வொன்றும் வேலைசெய்யும் மொத்த அளவினைக் கணக்கிட, அவ்விசைகளின் இணைவாக்க விளைவு விசையைக் கணக்கிட்டு அவ்விணைவாக்க விளைவு விசையின் வேலை அளவைக் கண்டால் போதுமானதாகும். ஏனெனில் இயக்கவியலில் "ஒரு துகளின்மேல் பல விசைகள் செய்யும் வேலைகளின் இயற்கணிதக் கூட்டல் (algebraic sum) அவ்விசைகளின் இணைவாக்க விளைவு விசையின் வேலை அளவுக்குச் சமம்" என்ற ஒரு முடிவு உண்டு. எனவே $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$,...... என்பன ஒரு புள்ளியிற் செயல்படும் விசைகள் எனவும் $\overline{d}$ என்பது

அவை செயல்படும் புள்ளியின் இடப்பெயர்ச்சி எனவும் இருந்தால்,

மொத்த வேலை அளவு $= \sum_{r=1}^{n} \overline{F}_r \cdot \overline{d} = \overline{R} \cdot \overline{d}$. ($R$ என்பது இணைவாக்க விளைவு விசை).

எடுத்துக்காட்டு 1 : ஒரு துகள் $2i+3j+4k$ என்ற புள்ளியி லிருந்து $5i+3j-7k$ என்ற புள்ளிக்கு $4i+7j-11k$ என்ற விசையினுல் நகர்த்தப்பெற்றுல் அவ்விசை செய்த வேலையைக் கணக்கிடு.

துகளின் முடிவு நிலையின் நிலைவெக்டர் $= 5i+3j-7k$

ஆரம்ப நிலையின் நிலைவெக்டர் $= 2i+3j+4k$

∴ துகளின் இடப்பெயர்ச்சி வெக்டர் $= 3i-11k$.

செயல்படும் விசை வெக்டர் $= 4i+7j-11k$.

∴ விசை செய்த வேலை $= (3i-11k) \cdot (4i+7j-11k)$

$= 12+121 = 133$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : ஒரு துகள் $(5, -1, -1)$ என்ற புள்ளியி லிருந்து $(7, 4, -3)$ என்ற புள்ளிக்கு $(10, 8, 6)$ என்ற விசையால் நகர்த்தப்பெற்றுல், அவ்விசை செய்த வேலை அளவு என்ன?

வெக்டரை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான வெக்டர் மும்மைத் தொகுதியான i, j, kயின் ஒருபடிச் சேர்வுகளாக எழுதுகையில், அவற்றின் கெழுக்களை மட்டும் குறிப்பிட்டு மூவளவை ஆயத்தொலைகள் போன்று எழுதுவது ஒரு வழக்கம். அந்த முறையில்தான் இங்குத் துகளின் ஆரம்ப நிலை, முடிவு நிலைகளின் நிலைவெக்டர்களும் விசை வெக்டரும் குறிக்கப் பெற்றுள்ளன.

ஆரம்ப நிலையின் நிலைவெக்டர் $= 5i-j-k$,

முடிவு நிலையின் நிலைவெக்டர் $= 7i+4j-3k$,

∴ இடப்பெயர்ச்சி $= 2i+5j-2k$.

விசை $= 10i+8j+6k$.

∴ விசை செய்த வேலை அளவு $= (10i+8j+6k) \cdot (2i+5j-2k)$

$= 20+40-12$

$= 48$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : ஒரு துகள் $(3, -7, 6)$ எனும் நிலையிலிருந்து $(6, -3, 4)$ என்ற நிலைக்கு $(5, -3, 4)$, $(2, 3, -1)$, $(3, -4, -5)$ என்ற விசைகளின் செயல்பாட்டினுல் நகர்த்தப்பெற்றுல், விசைகளின் மொத்த வேலை அளவைக் கணக்கிடு.

விசைகள் $5i-3j+4k,\ 2i+3j-k,\ 3i-4j-5k.$

∴ இணைவாக்க விளைவு விசை $= 10i-4j-2k.$

இடப்பெயர்ச்சி $= (6i-3j+4k)-(3i-7j+6k)$

$= 3i+4j-2k.$

∴ மொத்த வேலை அளவு $= (10i-4j-2k)\cdot(3i+4j-2k)$

$= 30-16+4$

$= 18$ அலகுகள்.

பயிற்சி 2

1. கீழ்க்கண்ட வெக்டர்களின் நீளங்களைக் கணக்கிடுக.
(i) $3i+2j+k$, (ii) $\sqrt{2}i-\sqrt{3}j$, (iii) $4i+5j-6k$.

2. கீழ்க்கண்ட வெக்டர் இணைகளுக்கிடைப்பட்ட கோணங்களைக் கண்டுபிடி:
(i) $i-j+k,\ -i+j+2k$, (ii) $3i+4j;\ 2j+5k$,
(iii) $2i+3j-4k,\ i-j+k$; (iv) $5i-4j-6k$; $3i-7j+8k$.

3. $\overline{a}=3i-2j+k$, $\overline{b}=3j+2i$ எனில் $|\overline{a}|$, $|\overline{b}|$, $\overline{a}\cdot\overline{b}$ ஆகியவை காண்க. இவ்வெக்டர்களுக்கிடைப்பட்ட கோணம் என்ன?

4. (i) $i-j+k,\ i+2j-k$, (ii) $2i+k,\ i+j+k$,
(iii) $3i-4j+5k,\ 5i-3j+4k$,
என்ற வெக்டர்களுக்கிடைப்பட்ட கோணங்களைக் காண்க.

5. $\overline{a}=i+j-k$, $\overline{b}=3i+4j-7k$, $\overline{c}=i-j+10k$ எனில் $|\overline{a}|$, $|\overline{b}|$, $|\overline{c}|$, $|\overline{a}+\overline{b}|$, $|\overline{b}-2\overline{c}|$, $|\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}|$, $|\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}|$ ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ எனும் வெக்டர்களில் இரண்டிரண்டாக எடுத்து அவற்றிற்கு இடைப்பட்ட கோணத்தைக் கண்டுபிடி.

6. (i) $i-j;\ j+k$; (ii) $j+2k-i;\ i+j-k$;
(iii) $2i-j+4k;\ 3i+4j-5k$; (iv) $i-j+k,\ i+2j+k$,
(v) $2i+3j-4k,\ i+j+k$, (vi) $3i+2j+k;\ 4i+5j-6k$;
ஆகிய வெக்டர் இணைகளுக்குச் செங்குத்தாய் அமையும் ஓரலகு வெக்டர்களைக் கண்டுபிடி.

7. $i-2j+3k;\ 2i+j-k;\ 3i-j+2k$; எனும் நிலை வெக்டர்கள் கொண்ட புள்ளிகளால் உருவாக்கப் பெறும் முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளத்தினையும் கோணங்களையும் கண்டுபிடி.

8. (i) $\dfrac{i-j}{\sqrt{2}}, \dfrac{i+j}{\sqrt{2}}, k$

(ii) $\dfrac{i-j-k}{\sqrt{3}}, \dfrac{i+k}{\sqrt{2}}, \dfrac{i-2j-k}{\sqrt{6}}$

என்ற வெக்டர் தொகுதிகள் ஒவ்வொன்றும் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தான மூன்று வெக்டர்களுடையன என நிறுவுக.

9. $2i-3k$, $j-k$, $i+j+k$, எனும் வெக்டர்களின் ஒரு படிச் சேர்வுகளாயும், ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாயும் அமைந்த மூன்று வெக்டர்கள் எழுதுக.

10. $i+j$, $j+k$, $k+i$ என்ற வெக்டர்களின் ஒரு படிச் சேர்வு களாகவும் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாயும் அமைந்த மூன்று வெக்டர்கள் எழுதுக.

11. $i+j-k$, $-i+j+k$, $i-j-k$, என்ற வெக்டர்களின் ஒரு படிச் சேர்வாகவும் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாகவும் அமைந்த மூன்று வெக்டர்கள் எழுதுக.

12. எண்ணளவு 3 உடையதும் $3i+j-4k, 6i+5j-2k$ களுக்குச் செங்குத்தானதுமான ஒரு வெக்டரைக் காண்க.

13. எண்ணளவு 10 உடையதும், $-2i+3j+6k$, உடன் $120°$யும் $-i-4j+8k$யுடன் $90°$ம் ஏற்படுத்தும் ஒரு வெக்டர் காண்க.

14. $ai+bj+ck$ யும் $(b-c)\,i+(c-a)\,j+(a-b)\,k$ யும் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்து எனக் காண்பி.

15. $\overline{a}$ எனும் ஒரு வெக்டர் $\overline{b}$, $\overline{c}$ என ஒரே நேர் கோட்டிலமையா இரு வெக்டர்களுக்குச் செங்குத்து எனில், $\overline{b}$, $\overline{c}$ யால் உருவாக்கப் பெறும் தளத்தில் அமையும் எல்லா வெக்டர்களுக்கும் $\overline{a}$ செங்குத்து என நிறுவுக.

16. $2i-j+k$, $i-3j-5k$, $3i-4j-4k$ எனும் முனைகளையுடைய ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களையும், மிகக் குறைந்த கோணத்தையும் காண்க. (து. பா. ஏப் 61)

17. $2i-j+k$, $i-3j-5k$, $3i-4j-4k$ எனும் புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை உருவாக்குகின்றன என நிறுவுக. (து. பா. செப் 62)

18. புள்ளிப் பெருக்கல், வெக்டர் பெருக்கல் முதலியவற்றை விவரி. அவற்றில் ஏதாவதொன்றைப் பயனுறுத்தி $2i+3j+4k$, $3i+4j+5k$ எனும் வெக்டர்களுக்கிடைப்பட்ட கோணத்தைக் கண்டுபிடி. (து. பா. ஏப் 64)

19. ஒரு நான்முகியின் நான்கு முனைகளின் நிலை வெக்டர்கள் $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ எனில்

$$(\vec{\alpha}-\vec{\delta})\cdot(\vec{\beta}-\vec{\gamma}) + (\vec{\beta}-\vec{\delta})\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\alpha}) + (\vec{\gamma}-\vec{\delta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = 0$$

என நிறுவுக. இதனின்றும், இரு சோடி எதிர் விளிம்புகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவையாய் அமைந்திருந்தால் மூன்றுவது சோடியும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என நிறுவுக. [B. Sc., கணிதம் ஏப். 69]

20. ABC ஒரு முக்கோணம். $\overline{CB}=\vec{a}$; $\overline{CA}=\vec{b}$; $\overline{AB}=\vec{c}$; எனில் $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}^2$ எனக் காண்பி.

21. $\vec{a}=(2, 3, -1)$; $\vec{b}=(1, 1, 5)$; $\vec{c}=(16, -11, -1)$ என்பவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என நிறுவுக.

22. $\vec{r}\cdot\vec{a}=\vec{r}\cdot\vec{b}=\vec{r}\cdot\vec{c}=0$ எனவும் $\vec{r}\neq 0$ எனவும் இருந்தால் $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ மூன்றும் ஒரே தளத்திலுள்ளவை எனக் காண்பி.

23. $i+j+k$ என்ற வெக்டர் $3i+mj+lk$, $3li-j+mk$ என்ற வெக்டர்களுக்குச் செங்குத்தானால் l, mன் மதிப்பைக் காண்க.

24. ஒரு துகள் (4, 3, −7) எனும் நிலையிலிருந்து (6, 5, 8) எனும் நிலைக்கு, (5, 3, −7) எனும் விசையால் நகர்த்தப் பெற்றால், அவ்விசை செய்த வேலையைக் கணக்கிடுக.

25. ஒரு துகள் (5, −3, −7)எனும், நிலையிலிருந்து (6, 2, −2) எனும் நிலைக்கு (10, −1, 10) என்ற விசையால் நகர்த்தப் பெற்றால் அவ்விசை செய்த வேலை 55 அலகுகள் என நிறுவுக.

26. ஒரு துகள் (5, − 3, 8) எனும் நிலையிலிருந்து (6, 7, 9) என்ற நிலைக்கு (3, −5, 4), (6, 5, 4), (−23, 7, 4), (18, 8, 9) என்ற நான்கு விசைகளின் ஒருமித்த செயல் பாட்டினால் (combined action) நகர்த்தப்பெற்றால் அந்நான்கு விசைகளும் சேர்ந்து செய்யும் வேலையளவைக் கணக்கிடுக.

3. வெக்டர் பெருக்கல்

முன்னுரை

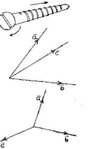
கொடுக்கப்பெற்ற இரு வெக்டர்களின் வரிசை முறையை மாற்றாமல் எடுத்துக் கொண்டு, அவற்றுடன் வேறொரு வரையறுக்கப்பட்ட வெக்டரை இணைப்பதைத்தான், இரு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கல் அல்லது குறுக்குப் பெறுக்கல் என்கிறோம். புள்ளிப் பெருக்கலைப் போன்று, இவ் வெக்டர் பெருக்கலிலும், பெருக்கற்பலனாய்க் கிடைக்கும் வெக்டர், கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்களின் தனித்தனி எண்ணளவுகளுக்கு நேர் விகித சமத்திலிருக்கும். அத்துடன் பங்கீட்டு விதியையும் இப் பெருக்கல் பின்பற்றுகிறது. ஆனால் வேறுசில பண்புகளில் புள்ளிப் பெருக்கலிலிருந்து மாறுபடுகிறது. எடுத்துக் காட்டாக, வெக்டர் பெருக்கல் மாற்று விதியைப் பின்பற்றுவதில்லை.

பரப்புகள், கன அளவுகள் முதலியவை பற்றிய சிக்கல்களைத் தீர்ப்பதில் ‘வெக்டர் பெருக்கல்’ எனும் கருத்து வெகுவாகப் பயன்படுகிறது. இரு வெக்டர்களால் உருவாக்கப் பெறும் தளத்திற்குச் செங்குத்தான வெக்டரைப் பற்றி ஆராய்வதிலும் வெக்டர் பெருக்கல் நன்கு பயன்படுகிறது.

§ 3.01. வலக்கை, இடக்கை அமைப்புக்கொண்ட மூன்று வெக்டர்கள் (Right handed and left handed system of vectors)

சாதாரணத் திருகாணியைப்பற்றி (screw) நாம் அறிவோம். மரப் பலகைகளில் செலுத்துவதற்குப் பயன்படும் முறுக்காணிகள், துளையிலிட்டு வலஞ்சுழியாகத் திருகினால் முன்னேறிச் செல்வதைக் காண்கிறோம். ஆனால் பொன் காதணிகளில் போடுகின்ற திருகாணிகள் எல்லாம், இடஞ்சுழியாகத் திருகினால் முன்னேறுமாறு அமைந்துள்ளதும் நாம் அறிவோம். இவ்வாறு வலஞ்சுழியாகத் திருகினால் முன்னேறும் திருகாணியை வலக்கைத் திருகாணி (Right handed screw) என்றும்

இடஞ்சுழியாகத் திருகினுல் முன்னேறும் திருகாணியை இடக்கைத் திருகாணி (left handed screw) என்றும் சொல்கிறேம். வலக்கைத் திருகாணியில், திருகாணி முன்னேறும் திசையிலிருந்து நோக்கினுல், நாம் திருகுவது இடஞ்சுழியாகத் தோன்றும். இவ்வாறு மூன்று வெக்டர்கள் $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ என்பவை $\bar{c}$ யிலிருந்து காணுகையில் $\bar{a}$ யிலிருந்து $\bar{b}$ க்குச் சுழல்வது இடஞ்சுழியாகத் தோன்றுமாறு அமைந்திருந்தால் அதனை வலக்கை அமைப்புடைய மூன்று வெக்டர்கள் என்கிறேம். அவ்வாறின்றி $\bar{c}$யிலிருந்து காணும் போது $\bar{a}$யிலிருந்து $\bar{b}$க்குச் சுழல்வது வலஞ்சுழியாகத் தோன்றினுல், அதனை இடக்கை அமைப்புடைய மூன்று வெக்டர்கள் என்கிறேம்.

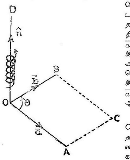


படம் 52.

கொடுக்கப்பட்ட மூன்று வெக்டர்களை வட்டச் சுழற்சியாக மாற்றி யமைப்பதால், அவ்வெக்டர்களின் வலக்கை அல்லது இடக்கை அமைப்பு மாறுவதில்லை.

§ 3.02. வெக்டர் பெருக்கல் வரையறை

கொடுக்கப்பட்ட இரு வெக்டர்கள் $\bar{a}$, $\bar{b}$ ஆகியவற்றின் வெக்டர் பெருக்கல் $\bar{a}\times\bar{b}$, அவ்விரு வெக்டர்களினுல் உருவாக்கப் பெறும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாயும், எத்திசையிலிருந்து பார்க்கும் போது $\bar{a}$யிலிருந்து $\bar{b}$க்குச் சுழல்வது இடஞ்சுழியாகத் தோன்றுமோ அத்திசையிலும் அமைந்த ஒரு வெக்டராகும். $\bar{a}$க்கும் $\bar{b}$க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில் $\bar{a}\times\bar{b}$ன் எண்ணளவு $|\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin\theta$ ஆகும்.



படம் 53.

படத்தில் $\overline{OA}=\bar{a}$; $\overline{OB}=\bar{b}$; OD என்ற கோடு AOB என்ற தளத்திற்குச் செங்குத்தாய் உள்ளது. மேலும் Dயிலிருந்து காணும்போது OAயிலிருந்து OBக்குச் சுழல்வது இடஞ்சுழியாகத்

தோன்றும். எனவே $\overline{a}\times\overline{b}$ என்ற வெக்டர் பெருக்கலினல் கிடைக்கும் வெக்டர் ODயின் வழி அமையும். $\hat{n}$ என்பது OD வழி அமையும் ஓரலகு வெக்டர் எனில், $\overline{a}\times\overline{b} = |\overline{a}|\,|\overline{b}|\,\sin\theta\,\hat{n}$ என்ற வெக்டராகும். அதாவது $\overline{a}\times\overline{b}$ என்ற வெக்டர், $\overline{a}$, $\overline{b}$யுடன் சேர்ந்து வலக்கை அமைப்புப் பெற்று விளங்குகிறது.

மாற்றுவிதி : வெக்டர் பெருக்கலின் வரையறைப்படி $\overline{a}\times\overline{b}$ யும், $\overline{b}\times\overline{a}$யும் வேறுபட்டவை என்பது தெளிவாகும். ஏனெனில் $\overline{a}$யிலிருந்து $\overline{b}$க்குத் திரும்புவது, எந்தப் பக்கத்திலிருந்து பார்த்தால் இடஞ்சுழியாகத் தெரியுமோ, அந்தத் திசையிலிருந்து பார்த்தால் $\overline{b}$யிலிருந்து $\overline{a}$க்குத் திரும்புவது வலஞ்சுழியாகத் தெரியும். எனவே $\overline{a}$, $\overline{b}$யினல் உருவாக்கப் பெறும் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக, ஆனல் நேர் எதிர்த் திசைகளில் $\overline{a}\times\overline{b}$யும், $\overline{b}\times\overline{a}$யும் அமைகின்றன. இரண்டின் எண்ணளவுகள் சமம்தான் என்றாலும், திசைகள் நேர் எதிராக அமைவதால் $\overline{a}\times\overline{b} = -\overline{b}\times\overline{a}$ ஆகும். எனவே வெக்டர் பெருக்கல் மாற்று விதியைப் பின்பற்றுவதில்லை.

§ 3·03. வெக்டர் பெருக்கலின் சில பண்புகள்

(i) இரு வெக்டர்கள் $\overline{a}$, $\overline{b}$ ஒன்றுக் கொன்று இணையானல், இரண்டிற்கு மிடைப்பட்ட கோணம் 0° அல்லது 180° ஆகும்.

$$\therefore \overline{a}\times\overline{b} = 0.$$

குறிப்பாக, $\overline{a}\times\overline{a} = 0$., அதாவது எந்த ஒரு வெக்டராலும் அதே வெக்டரைக் குறுக்குப் பெருக்கல் (Cross product) செய்தால் முடிவு 0 ஆகும்.

(ii) இரு வெக்டர்களை வெக்டர் பெருக்கல் செய்யும்போது, அவ் வெக்டர்களில் ஒன்றையோ அல்லது இரண்டையுமோ, திசையிலிகள் பெருக்குமானல், அவ்விரு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கலை அத்திசையிலிகள் பெருக்கும். அதாவது

$$(m\overline{a})\times(n\overline{b}) = mn\,(\overline{a}\times\overline{b}).$$

(iii) i, j, k என்ற ஓரலகு வெக்டர்களை எடுத்துக் கொண்டால் $i\times i = j\times j = k\times k = 0$.

மேலும் i, j, k ஒரு வலக்கை அமைப்புடைய மும்மை வெக்டர் தொகுதியாகும். எனவே kயிலிருந்து காணும்போது, iயிலிருந்து jக்குச் சுழல்வது இடஞ்சுழியாகத் தோன்றும்.

$\therefore i\times j = k$,. இதே போன்று

$j\times k = i$

$k\times i = j$ என்பனவும் உண்மையாகும்.

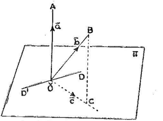
ஆனால் $j\times i = -i\times j = -k.$
$k\times j = -j\times k = -i$
$i\times k = -k\times i = -j.$ ஆகும்.

(iv, லாக்ராஞ்சியின் முற்றொருமை. (Lagrange's identity).
$(\overline{a}\times\overline{b})^2 = \overline{a}^2\,\overline{b}^2 - (\overline{a}\cdot\overline{b})^2$

$\overline{a}$, $\overline{b}$ ஆகியவற்றால் உருவாக்கப் பெறும் தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர் $\hat{n}$ எனவும், $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\hat{n}$ ஆகியவை வலக்கை அமைப்பு டையன எனவும் கொண்டால் :

$$\overline{a}\times\overline{b} = |\overline{a}|\,|\overline{b}|\sin\theta\;\hat{n}.$$
$$\therefore\ (\overline{a}\times\overline{b})\cdot(\overline{a}\times\overline{b}) = \{|\overline{a}|\,|\overline{b}|\sin\theta\}^2\;\hat{n}\cdot\hat{n}.$$
$$\therefore\ (\overline{a}\times\overline{b})^2 = |\overline{a}|^2\,|\overline{b}|^2\sin^2\theta.$$
$$= |\overline{a}|^2\,|\overline{b}|^2 - |\overline{a}|^2\,|\overline{b}|^2\cos^2\theta.$$
$$= |\overline{a}|^2\,|\overline{b}|^2 - (\overline{a}\cdot\overline{b})^2$$

§ 3·04. $\overline{a}$, $\overline{b}$ எனும் இரு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கல் $\overline{a}\times\overline{b}$யும், $\overline{a}$க்குச் செங்குத்தான தளம் ஒன்றில் $\overline{b}$ன் விழலாயமைந்த வெக்டர் $\overline{c}$யை $\overline{a}$யுடன் சேர்த்து உருவாக்கிய வெக்டர் பெருக்கல் $\overline{a}\times\overline{c}$யும் சமம்.



படம் 54.

$\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$ என்பன இரு வெக்டர்கள். π என்பது $\overline{OA}$க்குச் செங்குத்தான தளம். $\overline{OC} = \overline{c}$ எனும் வெக்டர், π யில் $\overline{OB}$யின் விழலாகும்.

$B\hat{O}A = \theta$ எனில், $B\hat{O}C = 90-\theta$.

$$\therefore \quad OC = |\bar{c}| = OB\cos(90-\theta) = OB\sin\theta.$$

OC என்பது OBயின் வீழல் ஆதலாலும், OA என்பது π க்குச் செங்குத்து என்பதாலும், OA, OB, OC ஒரு தளத்தில் அமைகின்றன. πயில் OCக்குச் செங்குத்தாக OD வரைந்தால், அது OAக்கும் OBக்கும் செங்குத்தாகும். மேலும் $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OD}$ ஆகியவை வலக்கை அமைப்பு உடையனவாயிருக்கும்படி ODயின் திசை எடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதனால் $\bar{a}\times\bar{b}$, $\bar{a}\times\bar{c}$ என்ற வெக்டர்கள் OD வழியே அமையும். OD வழியான ஓரலகு வெக்டர் $\hat{n}$ எனில்

$$\bar{a}\times\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin\theta\,\hat{n}. = (OA.OB\sin\theta)\,\hat{n}.$$

ODயானது OC, OAகளுக்குச் செங்குத்தாதலால்,

$$\bar{a}\times\bar{c} = |\bar{a}|\,|\bar{c}|\sin 90^\circ\,\hat{n}. = OA.OC\,\hat{n}. = (OA.OB\sin\theta)\,\hat{n}.$$

எனவே $\bar{a}\times\bar{b} = \bar{a}\times\bar{c}$ என்பது நிறுவப்படுகிறது.

அதாவது $\bar{a}$யுடன் $\bar{b}$யின் வெக்டர் பெருக்கல் செய்வதால் வரும் வெக்டரைக் காண, $\bar{a}$க்குச் செங்குத்தான தளத்தில் $\bar{b}$யின் வீழல் வெக்டரைக் கண்டு, அதனை $\frac{\pi}{2}$ என்ற கோண தூரத்திற்கு OAவை அச்சாகக்கொண்டு இடஞ்சுழியாகச் சுழற்றி $|\bar{a}|$ மடங்கு உருப் பெருக்கம் (magnification) செய்தால் கிடைக்கும்.

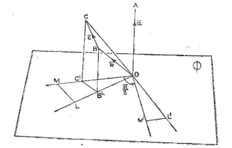
§ 3·05. பங்கீட்டு விதி (Distributive Law)

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ என்பன ஏதோ மூன்று வெக்டர்கள் எனில்

$$\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}.$$

$\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{BC}$ என்பன முறையே $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ என்ற வெக்டர்களைக் குறிக்கின்றன எனக் கொள்வோம். $\overline{OC} = \overline{OB}+\overline{BC} = \bar{b}+\bar{c}$.

$\bar{a}$க்குச் செங்குத்தான தளம் πயில், OB, BC, OCகளின் வீழல்கள் முறையே OB', $B'C'$, OC' வரைக. OB', OC'களை



படம் 55.

முறையே L, Mக்கு $OL=|\overline{a}|\,OB'$, $OM=|\overline{a}|\,OC'$ என இருக்கும்படி நீட்டுக.

$\therefore$ LMம் $|\overline{a}|\,B'C'$ என அமையும்.

OL, OM என்ற கோடுகளை இடஞ்சுழியாக $90°$ கோணத்துக்கு OAவை அச்சாகக் கொண்டு சுழற்றுக. புதிய நிலையில், L, M களை L', M' எனக் குறித்திடுக.

முன்னர்ப் பார்த்த விளக்கப்படி $\overline{a}\times\overline{b}$ என்ற வெக்டர் $\overline{a}\times\overline{OB'}$க்குச் சமம். அதுவே OL' என்ற வெக்டரால் குறிக்கப்படும்.

அதேபோல் $\overline{a}\times\overline{c} = \overline{a}\times B'C'$

$$= \overline{L'M'}$$

$$\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\times\overline{OC}$$

$$= \overline{a}\times\overline{OC'}$$

$$= \overline{OM'}$$

$$= \overline{OL'+L'M'}$$

$$= \overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$$ ஆகும்.

இப்பங்கீட்டு விதியை வெக்டர்களின் வரிசை முறையை முன்பின்னாக மாற்றாமல், இரண்டுக்கும் மேற்பட்ட வெக்டர்கள் தொகுதிக்கும் விரிவாக்கலாம்.

அதாவது $(\overline{a}_1+\overline{a}_2+\overline{a}_3+\dots)\times(\overline{b}_1+\overline{b}_2+\overline{b}_3+\dots)$

$$=[(\overline{a}_1\times\overline{b}_1)+(\overline{a}_1\times\overline{b}_2)+(\overline{a}_1\times\overline{b}_3)+\dots]+[\overline{a}_2\times\overline{b}_1+\overline{a}_2\times\overline{b}_2+\dots\dots]$$
$$+[\overline{a}_3\times\overline{b}_1+\overline{a}_3\times\overline{b}_2+\overline{a}_3\times\overline{b}_3+\dots\dots]+\dots\dots$$

என எழுதலாம்.

§ 3·06. $\overline{a}\times\overline{b}$யை i, j, kயில் எழுதுதல்

$\overline{a}=a_1i+a_2j+a_3k,\ \overline{b}=b_1i+b_2j+b_3k$, எனக.

$$\therefore\ \overline{a}\times\overline{b}=(a_1i+a_2j+a_3k)\times(b_1i+b_2j+b_3k)$$

$$=a_1b_1i\times i+a_1b_2i\times j+a_1b_3i\times k+a_2b_1j\times i+a_2b_2j\times j$$
$$+a_2b_3j\times k+a_3b_1k\times i+a_3b_2k\times j+a_3b_3k\times k.$$

ஆனால் $i\times i=j\times j=k\times k=0$

மேலும் $i\times j=k,\ j\times i=-k,$

$j\times k=i,\ k\times j=-i$

$k\times i=j,\ i\times k=-j$

$$\therefore\ \overline{a}\times\overline{b}=(a_2b_3-a_3b_2)i-(a_1b_3-a_3b_1)j+(a_1b_2-a_2b_1)k$$

எனக் கிடைக்கும்.

இது $\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையின் விரிவாகும்.

$$\therefore\ \overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

§ 3·07. இரு வெக்டர்களுக்கிடைப்பட்ட கோணத்தைக் காணல்

1. வரையறைப்படி $\overline{a}\times\overline{b}=|\overline{a}|\,|\overline{b}|\sin\theta\,\hat{n}$.

$$\therefore\ |\overline{a}\times\overline{b}|=|\overline{a}|\,|\overline{b}|\sin\theta\quad\{\because\ |\hat{n}|=1\}.$$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{|\overline{a}\times\overline{b}|}{|\overline{a}|\,|\overline{b}|}$$

2. $\overline{a}=a_1i+a_2j+a_3k$ எனவும்

$\overline{b}=b_1i+b_2j+b_3k$ எனவும் இருந்தால்,

$$\overline{a}\times\overline{b}=(a_2b_3-a_3b_2)i+(a_3b_1-a_1b_3)j+(a_1b_2-a_2b_1)k$$

ஆகையால்,

$$|\overline{a}\times\overline{b}|=\{\Sigma(a_2b_3-a_3b_2)^2\}^{1/2}$$

மேலும் $|\overline{a}|=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}$

$|\overline{b}|=(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{1/2}$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{\{\Sigma(a_2b_3-a_3b_2)^2\}^{1/2}}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{\frac{1}{2}}}$$

3. இரு வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று இணையானால், $\theta = 0$;

$\therefore \sin\theta = 0$; i.e. $\Sigma(a_2b_3 - a_3b_2)^2 = 0$.

இது மூன்று வர்க்கங்களின் கூடுதலாகையால், ஒவ்வொன்றும் தனித்தனியே பூச்சியமாயிருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \; a_2b_3 - a_3b_2 = 0$$
$$a_3b_1 - a_1b_3 = 0$$
$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$
$$\text{i.e.} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

இதுவே $a_1i + a_2j + a_3k$, $b_1i + b_2j + b_3k$ எனும் இரு வெக்டர்கள் இணையாயிருக்கத் தேவையான கட்டுப்பாடாகும்.

4. **$\overline{a}$, $\overline{b}$க்குச் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர் :**

$\overline{a} \times \overline{b}$ என்ற வெக்டர் $\overline{a}$, $\overline{b}$யின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகும். அதன் எண்ணளவு $|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}|\,|\overline{b}| \sin\theta$.

எனவே $\overline{a}$க்கும் $\overline{b}$க்கும் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர்

$$= \frac{\overline{a} \times \overline{b}}{|\overline{a} \times \overline{b}|}.$$

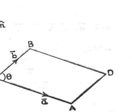
5. $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{a} \times \overline{c}$ எனில் $\overline{b} = \overline{c}$ என இருக்க வேண்டும் என்ற அவசியமில்லை. ஏனெனில் m எனும் ஏதோ ஒரு எண் $\overline{c} = \overline{b} + m\overline{a}$ எனுமாறு இருந்தால்,

$$\overline{a} \times \overline{c} = \overline{a} \times (\overline{b} + m\overline{a})$$
$$= \overline{a} \times \overline{b} + m\,\overline{a} \times \overline{a}$$
$$= \overline{a} \times \overline{b} \text{ என்றாகும்.} \quad (\because \overline{a} \times \overline{a} = 0)$$

§ 8·08. வெக்டர் பெருக்கலின் வடிவகணித விளக்கம்

$\overline{OA} = \overline{a}$; $\overline{OB} = \overline{b}$; $A\hat{O}B = \theta$ என்க. OC என்பது AOB எனும் தளத்திற்குச் செங்குத்து $\overline{a}$, $\overline{b}$ யுடன் OC வழியமையும் ஓரலகு வெக்டர் $\hat{n}$ வலக்கை அமைப்புப் பெற்று விளங்குகிறது. அப்படியானால், $\overline{a} \times \overline{b} = |\overline{a}|\,|\overline{b}| \sin\theta\,\hat{n}$.

$$\therefore \; |\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}|\,|\overline{b}| \sin\theta.$$



படம் 56.

அதாவது $\overline{a}\times\overline{b}$யின் எண்ணளவு, OA, OBயை அண்டைப்பக்கங்களாய்க்கொண்ட இணைகரத்தின் (படத்தில் $OADB$) பரப்புக்குச் சமம் ஆகும். இதனுல் பரப்பளவுகளைக் கூட வெக்டர்களால் குறிக்கும் வழக்கம் ஒன்று ஏற்பட்டுள்ளது. பொதுவாகப் பரப்புகள் வெறும் திசையிலிகள் ஆகும். ஆனல் அப்பரப்பினை அடைக்கும் சுற்று வரைவரையை எந்தத் திசையில் சுற்றி வருகிறேமோ அதைப்பொறுத்து அது மிகை (+) அல்லது குறை (−) எனக் கருதப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, படத்தில் $OADBO$ என்ற திசையில் சுற்றிவந்தால் அப்பரப்பு + என்றும், $OBDAO$ என்ற திசையில் சுற்றினுல், − என்றும் கருதப்படும். எனவே $\overline{a}\times\overline{b}$ என்ற வெக்டர், பரப்பு $OADB$யால் குறிக்கப்படும். $\overline{a}\times\overline{b}$ என்ற வெக்டர் OCயின் வழி அமைகிறது. அதன் மீதிருந்து காணும்போது O, A, D, B என்ற வரிசையில் புள்ளிகள் எடுத்தால் அது இடஞ்சுழியாகத் தெரியும். எனவே பரப்பு $OADB$ +என எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது. மாறிச் சுற்றினுல் வலஞ்சுழியாகத் தெரியும்; எனவே அது −ஆக எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது.

இவ்வாறு ஒருதளத்தில் தன்னைத்தானே வெட்டிக்கொள்ளாத மூடிய வளைகோட்டிஞல் அடைக்கப்பெற்ற ஒரு பரப்பு, ஒரு வெக்டரால் குறிக்கப்பெறும் தகுதியைப் பெற

(i) அவ்வெக்டரின் எண்ணளவு, பரப்பின் அளவுக்குச் சமமாக இருக்கவேண்டும்.

(ii) அவ்வெக்டரின் திசை, தளத்திற்குச் செங்குத்தாயிருக்க வேண்டும்.

(iii) அதன் மீதிருந்து காணும்போது, அப்பரப்பினைச் சுற்றி வருவது இடஞ்சுழியாகத் தோன்றும் திசையில் அவ்வெக்டர் அமைய வேண்டும்.

எடுத்துக் காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1: $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ என்பன ஏதோ மூன்று வெக்டர்கள் எனில் $\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})+\overline{b}\times(\overline{c}+\overline{a})+\overline{c}\times(\overline{a}\times\overline{b}) = 0$ எனக் காண்பி.

(Bsc. நு. பா. செப். 67)

பங்கீட்டு விதிப்படி
$$\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c} = \overline{a}\times\overline{b}-\overline{c}\times\overline{a}$$
$$\overline{b}\times(\overline{c}+\overline{a}) = \overline{b}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{a} = \overline{b}\times\overline{c}-\overline{a}\times\overline{b}$$
$$\overline{c}\times(\overline{a}+\overline{b}) = \overline{c}\times\overline{a}+\overline{c}\times\overline{b} = \overline{c}\times\overline{a}-\overline{b}\times\overline{c}$$

கூட்டினுல் $\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})+\overline{b}\times(\overline{c}+\overline{a})+\overline{c}\times(\overline{a}+\overline{b}) = 0.$

எடுத்துக்காட்டு 2: $(2i+5j-7k)\times(-3i+4j+k)$ன் மதிப்பு என்ன?

வெக்டர் பெருக்கலை அணிக்கோவை முறையில் எழுதினால்,

$$(2i+5j-7k)\times(-3i+4j+k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 5 & -7 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (5+28)\,i + j\,(21-2) + k\,(8+15)$$

$$= 33i + 19j + 23k.$$

எடுத்துக்காட்டு 3 : $2i-j+k$, $3i+4j-k$ என்ற வெக்டர்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர் என்ன? கொடுக்கப் பட்டுள்ள வெக்டர்களுக் கிடைப்பட்ட கோணத்தின் மதிப்பு என்ன?

(Bsc. து. பா. ஏப். 66)

$\overline{a} = 2i-j+k.$, $\overline{b} = 3i+4j-k.$, என்ற வெக்டர்களுக்குச் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர்

$$= \frac{\overline{a}\times\overline{b}}{|\overline{a}\times\overline{b}|}$$

$$\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-4)\,i + j\,(3+2) + k\,(8+3)$$

$$= -3i + 5j + 11k$$

$$\therefore\ |\overline{a}\times\overline{b}| = \sqrt{9+25+121} = \sqrt{155}$$

$\therefore$ $\overline{a}$க்கும் $\overline{b}$க்கும் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர்

$$= \frac{-3i+5j+11k}{\sqrt{155}}$$

$\overline{a}$க்கும் $\overline{b}$க்கும் இடைப்பட்ட கோணத்தின் சைன்மதிப்பு

$$\sin\theta = \frac{|\overline{a}\times\overline{b}|}{|\overline{a}|\ |\overline{b}|}$$

$$= \frac{\sqrt{155}}{\sqrt{6}\ \sqrt{26}}$$

$$= \sqrt{\frac{155}{156}}$$

$$\therefore\ \theta = \sin^{-1}\left[\sqrt{\frac{155}{156}}\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 4 : $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ எனும் நிலை வெக்டர்களுடைய புள்ளிகளால் உருவாக்கப்படும் தளத்திற்கு, $\overline{a}\times(\overline{b}-\overline{c})+\overline{b}\times(\overline{c}-\overline{a})+\overline{c}\times(\overline{a}-\overline{b})$ எனும் வெக்டர் செங்குத்து என நிறுவுக.

A, B, C எனும் புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ என்க.

$\therefore\ \overline{AB} = \bar{b}-\bar{a}$; $\overline{AC} = \bar{c}-\bar{a}$;

$\therefore$ வெக்டர் பரப்பு $\Delta ABC = \frac{1}{2}\ \overline{AB}\times\overline{AC}$

$= \frac{1}{2}\ (\bar{b}-\bar{a})\times(\bar{c}-\bar{a})$

$= \frac{1}{2}\ \{\bar{b}\times\bar{c}-\bar{b}\times\bar{a}-\bar{a}\times\bar{c}+\bar{a}\times\bar{a}\}$

$= \frac{1}{2}\ \{\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}\}$

இது ΔABCயின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகும். மேலும் $\bar{a}\times(\bar{b}-\bar{c})+\bar{b}\times(\bar{c}-\bar{a})+\bar{c}\times(\bar{a}-\bar{b})$

$= \bar{a}\times\bar{b}-\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}-\bar{b}\times\bar{a}+\bar{c}\times\bar{a}-\bar{c}\times\bar{b}$

$= 2\ \{\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}\}$

இவ்வெக்டர், வெக்டர் பரப்பு ΔABCயைப் போல் நான்கு மடங்காகும். எனவே இதுவும் ABCயின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5: $\bar{a}\times\bar{b} = \bar{c}\times\bar{d}$ எனவும், $\bar{a}\times\bar{c} = \bar{b}\times\bar{d}$ எனவுமிருந்தால், $\bar{a}-\bar{d}$, $\bar{b}-\bar{c}$ எனும் வெக்டர்கள் இணையானவை என நிறுவுக.

$(\bar{a}-\bar{d})\times(\bar{b}-\bar{c})$ என்ற வெக்டர் பெருக்கலை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இது $= \bar{a}\times\bar{b}-\bar{a}\times\bar{c}-\bar{d}\times\bar{b}+\bar{d}\times\bar{c}$

$= (\bar{a}\times\bar{b}-\bar{c}\times\bar{d})-(\bar{a}\times\bar{c}-\bar{b}\times\bar{d})$

$= 0-0$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ள கட்டுப்பாடுகளின்படி)

$= 0$

$\therefore$ $(\bar{a}-\bar{d})$யும் $(\bar{b}-\bar{c})$யும் இணையான வெக்டர்கள்.

§ 3·09. திரிகோண கணிதத்தில் வெக்டர் பெருக்கலின் பயன்பாடு

பின்வரும் எடுத்துக் காட்டுகள், வெக்டர் பெருக்கல், திரிகோண கணிதத்தில் எவ்வாறு பயன்படும் என்பதனை விளக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1: ஒரு முக்கோணம் ABCயில் $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ என நிறுவுக.

$\Delta\ ABC$யின் பக்கங்கள் BC, CA, AB என்பவை $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ என்ற வெக்டர்களைக் குறிக்கட்டும்.

$|\bar{a}| = BC = a,$

$|\bar{b}| = CA = b$

$|\bar{c}| = AB = c$

மேலும் $\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{BA}$ = வெக்டர் பரப்பு $\triangle ABC$

i.e. $\frac{1}{2}\overline{a}\times(-\overline{c})$ = வெக்டர் பரப்பு $\triangle ABC$

இதேபோன்று $\frac{1}{2}\ CA\times CB$, $\frac{1}{2}\ AB\times AC$ என்பனவும் வெக்டர் பரப்பு $\triangle ABC$யினைக் குறிக்கும்.

$\therefore\ -\frac{1}{2}\ \overline{a}\times\overline{c} \ = -\frac{1}{2}\ \overline{b}\times\overline{a} \ = -\frac{1}{2}\ \overline{c}\times\overline{b}$

i.e. $\overline{a}\times\overline{b} = \overline{b}\times\overline{c} = \overline{c}\times\overline{a}$

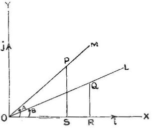
$\therefore\ |\overline{a}\times\overline{b}| = |\overline{b}\times\overline{c}| = |\overline{c}\times\overline{a}|$

i.e. $ab\sin C = bc\sin A = ca\sin B$

முழுதும் abcயால் வகுக்க,

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}.$$

எடுத்துக்காட்டு 2: $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ என நிறுவுக.



படம் 57.

OX, OY என்பன X, Y அச்சுக்கள். அவற்றின் வழியமைந்த ஓரலகு வெக்டர்கள் i, j என்க. OL, OM எனும் கோடுகள் $X\hat{O}L=\hat{B}$, $X\hat{O}M=\hat{A}$ எனுமாறு அமைந்துள்ளன. அவற்றில் P, Q என்ற புள்ளிகளை $OP = OQ = 1$ அலகு எனும்படி எடுத்துக்கொள்க. PS, QRகளை OXக்குச் செங்குத்தாக வரைக.

$$OS = OP\cos A$$

$$= \cos A$$

$$OR = OQ \cos B = \cos B$$
$$PS = OP \sin A = \sin A$$
$$QR = OQ \sin B = \sin B$$
$$\therefore \overline{OP} = i \cos A + j \sin A$$
$$\overline{OQ} = i \cos B + j \sin B$$

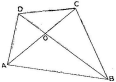
i, j யுடன் வலக்கை அமைப்புடைய XOY தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர் k என்க.

$$\therefore \overline{OQ} \times \overline{OP} = |\overline{OQ}|\,|\overline{OP}| \sin(A-B)\, k$$
$$= \sin(A-B)\, k$$

ஆனால் $\overline{OQ} \times \overline{OP} = (i \cos B + j \sin B) \times (i \cos A + j \sin A)$

$$= (\sin A \cos B - \cos A \sin B)\, i \times j$$
$$= (\sin A \cos B - \cos A \sin B)\, k$$
$$\therefore \sin(A-B)\, k = (\sin A \cos B - \cos A \sin B)\, k$$
$$\therefore \sin(A-B) = (\sin A \cos B - \cos A \sin B)$$

எடுத்துக்காட்டு 3: ஒரு சமதள நாற்கரம் $ABCD$யின் வெக்டர் பரப்பு $\frac{1}{2}\, \overline{AC} \times \overline{BD}$ எனக்காட்டு. மூலைவிட்டங்கள் Oவில் வெட்டு மானால், நாற்கரப்பரப்பு $ABCD$

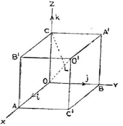


படம் 58.

$$= \text{வெக்டர் பரப்புகள் } \{\Delta OAB + \Delta OBC + \Delta OCD \Delta ODA\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{\overline{OA} \times \overline{OB} + \overline{OB} \times \overline{OC} + \overline{OC} \times \overline{OD} + \overline{OD} \times \overline{OA}\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{\overline{OA} \times \overline{OB} - \overline{OA} \times \overline{OD} + \overline{OC} \times \overline{OD} - \overline{OC} \times \overline{OB}\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{\overline{OA} \times (\overline{OB} - \overline{OD}) + \overline{OC} \times (\overline{OD} - \overline{OB})\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{\overline{OA} \times (\overline{DO} + \overline{OB}) + \overline{OC} \times (\overline{BO} + \overline{OD})\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{\overline{OA} \times \overline{DB} + \overline{OC} \times \overline{BD}\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\overline{OA} - \overline{OC}\} \times \overline{DB}$$
$$= \frac{1}{2}\{\overline{CO} + \overline{OA}\} \times \overline{DB}$$
$$= \frac{1}{2}\,\overline{CA} \times \overline{DB}$$
$$= \frac{1}{2}\,\overline{AC} \times \overline{BD}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 : ஓரலகுப் பக்கம் கொண்ட கன சதுரம் ஒன்றின் ஒரு முனையிலிருந்து அதன் வழிச் செல்லாத கனசதுர மூலை வட்டத்திற்குள்ள செங்குத்துத் தூரத்தைக் காண்க.



படம் 59.

OA, OB, OC என்பன கனசதுரத்தின் மூன்று விளிம்புகள். $OA = OB = OC =$ ஓரலகு ஆகையால்

$$\overline{OA} = i,\ \overline{OB} = j,\ \overline{OC} = k$$
$$\therefore\ \overline{OO'} = \overline{OA} + \overline{AC'} + \overline{C'O'}$$
$$= \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$$
$$= i + j + k.$$

C என்ற முனை k எனும் நிலைவெக்டருடையது.

OO'ன் திசையிலமையும் ஓரலகு வெக்டர்

$$= \frac{i+j+k}{|i+j+k|} = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}} = \hat{n} \text{ என்க.}$$

Cயிலிருந்து OO' க்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடு CL எனில்

$$CL = OC \sin L\hat{O}C.$$

i.e. $CL = |\overline{OC} \times \hat{n}|$

$$= k \times \left| \frac{(i+j+k)}{\sqrt{3}} \right|$$

$$= \left| \frac{j-i}{\sqrt{3}} \right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 5: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ எனும் நிலை வெக்டருடைய புள்ளிகளால் உருவாக்கப் பெறும் முக்கோணத்தின் வெக்டர் பரப்பு $\frac{1}{2}\{\bar{b} \times \bar{c} + \bar{c} \times \bar{a} + \bar{a} \times \bar{b}\}$ என நிறுவுக. அதனைப் பயன் படுத்தி மூன்று புள்ளிகள் ஒரே நேர் கோட்டில் அமையத் தேவையான கட்டுப்பாடு என்ன எனக் காண்க.

ΔABC யின் முனைகள் A, B, C யின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ என்க.

$$\therefore \overline{BC} = \bar{c} - \bar{b};$$

$$\overline{BA} = \bar{a} - \bar{b};$$

வெக்டர் பரப்பு $\Delta ABC = \frac{1}{2}\, \overline{BC} \times \overline{BA}$

$$= \tfrac{1}{2}\,(\bar{c} - \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\{\bar{c} \times \bar{a} - \bar{c} \times \bar{b} - \bar{b} \times \bar{a} + \bar{b} \times \bar{b}\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\{\bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{c} + \bar{c} \times \bar{a}\}$$

மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர் கோட்டிலமையுமானால், முக்கோணப் பரப்பு பூச்சியமாகும்.

அதாவது $\bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{c} + \bar{c} \times \bar{a} = 0$.

இதுவே தேவையான கட்டுப்பாடு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6: A, B எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிற்கு C யிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துத் தூரம்

$|\bar{b} \times \bar{c} + \bar{c} \times \bar{a} + \bar{a} \times \bar{b}| \div |\bar{b} - \bar{a}|$ என்று நிறுவுக.

ஏதோ ஓராதியைப் பொறுத்து, A, B, Cகளின் நிலைவெக்டர்கள் $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ என்க.

$$\therefore \overline{AB} = \bar{b} - \bar{a}$$

$$AB = |\overline{AB}| = |\bar{b} - \bar{a}|$$

$\therefore$ AB வழியமையும் ஓரலகுவெக்டர் $\hat{n} = \dfrac{\bar{b}-\bar{a}}{|\bar{b}-\bar{a}|}$

$\overline{AC} = \bar{c}-\bar{a}$

$\therefore$ C-யிலிருந்து ABக்குள்ள செங்குத்துத் தூரம்

$$= |\hat{n}\times\overline{AC}|$$

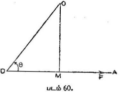
$$= \left| \frac{(\bar{b}-\bar{a})}{[\bar{b}-\bar{a}]} \times(\bar{c}-\bar{a}) \right|$$

$$= \frac{|\bar{b}\times\bar{c}-\bar{b}\times\bar{a}-\bar{a}\times\bar{c}+\bar{a}\times\bar{a}|}{|\bar{b}-\bar{a}|}$$

$$= \frac{|\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}|}{|\bar{b}-\bar{a}|}$$

§ 3.10. இயக்கவியலில் வெக்டர் பெருக்கலின் பயன். ஒரு புள்ளிபற்றிய ஒரு விசையின் திருப்புத்திறன் (Moment of a force about a point)

P எனும் புள்ளி வழியே PA என்ற கோட்டின் வழியாக F என்ற விசை செயல்படும் போது, O என்ற வேறொரு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி பற்றிய, F என்ற விசையின் திருப்புத் திறன் $F\times OM$ ஆகும். OM என்பது PA-க்குச் செங்குத்து. POவைச் சேர்க்க. $O\hat{P}M = \theta$ எனில் $OM = OP \sin\theta$.



படம் 60.

$\therefore$ விசையின் திருப்புத்திறன் $F\times OM = F.OP \sin\theta$.

இது $\overline{OP}\times\overline{F}$ என்ற வெக்டர் பெருக்கலின் எண்ணளவாகும். மேலும் O என்ற புள்ளி வழி, OPMக்குச் செங்குத்தான ஓரச்சினைப் பொறுத்து, $\overline{F}$ எனும் விசை இடஞ்சுழியாகச் சுற்றுகிறது. எனவே $\overline{OP}\times\overline{F}$ என்ற வெக்டர், $\overline{OP}$, $\overline{F}$ என்ற வெக்டர்களுடன் வலக்கை அமைப்புப் பெற்று விளங்குகிறது. அதாவது அவ்விசையின் திருப்புத் திறன் ஒரு வெக்டராகும். எந்தப் புள்ளியைப் பற்றிய திருப்புத்திறன் வேண்டுமோ, அப்புள்ளியை விசைச் செயல்படும் புள்ளிக்கு இணைத்துக் கிடைக்கும் வெக்டருடன் விசை வெக்டரினை, வெக்டர் பெருக்கல் செய்தால் அவ்விசையின் திருப்புத் திறன் கிடைக்கும்.

ஒன்றுக்கு மேல் விசைகள் ஒரு புள்ளியில் செயல்பட்டால் அவற்றின் திருப்புத்திறன்களின் மொத்தம், அவ்விசைகளின் இணைவாக்க விளைவு

விசையின் திருப்புத் திறனுக்குச் சமம். ஏனெனில் $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \overline{F_3}, \ldots \overline{F_n}$ என்பன P எனும் ஒரு புள்ளியில் செயல்படும்போது அவற்றின் தனித் தனித் திருப்புத் திறன்கள் $\overline{OP}\times\overline{F_1}, \overline{OP}\times\overline{F_2}, \ldots \overline{OP}\times\overline{F_n}$ ஆகும்.

$\therefore$ திருப்புத் திறன்களின் மொத்தம் $= \overline{OP}\times\overline{F_1}+\overline{OP}\times\overline{F_2}+\ldots+\overline{OP}\times\overline{F_n}$

$= \overline{OP}\times(\overline{F_1}+\overline{F_2}+\ldots+\overline{F_n})$

$= \overline{OP}\times\overline{R}$. இதில் R என்பது $\overline{F_1}, \overline{F_2} \ldots \overline{F_n}$-களின் இணை வாக்க விளைவு விசை.

O-வை ஆதியாய்க் கொண்டு

$$\overline{R} = Xi+Yj+Zk,$$

$$\overline{OP} = xi+yj+zk \text{ என்க.}$$

$$\therefore \text{மொத்தத் திருப்புத்திறன் } \overline{M} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$= (yZ-zY)\,i+(zX-xZ)\,j+(xY-yX)\,k.$$

இதில் i, j, k-ன் கெழுக்கள் ஆயக்கோடுகளைப் பற்றிய அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களாகும். அதாவது OX, OY, OZ அச்சுக்களைப் பற்றிய திருப்புத்திறன்கள் முறையே $\overline{M}\cdot i$, $\overline{M}\cdot j$, $\overline{M}\cdot k$ ஆகும். எனவே, ஏதேனும் ஒரு விசையின் திருப்புத்திறன் ஏதேனும் ஒரு கோட்டைப்பற்றிக் காண, அக்கோட்டில் உள்ள ஒரு புள்ளியைப் பற்றிய திருப்புத்திறன் கண்டு, அதை அக்கோட்டின் திசையில் கூறுகப் பிரிக்க வேண்டும். இவ்வாறு ஒரு புள்ளி பற்றிய திருப்புத்திறன் என்பது ஒரு வெக்டராகவும், ஒரு கோட்டைப் பற்றிய திருப்புத்திறன் என்பது திசையிலியாகவும் அமைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1: $3i+k$ என்ற விசை $2i-j+3k$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செயல்படுகிறது. $i+2j-k$ என்ற புள்ளி பற்றிய இவ் விசையின் திருப்புத்திறன் காண்க.

(B.Sc. து. பா. ஏப். 67)

$$\overline{F} = 3i+k$$

செயல்படும் புள்ளி P-யின் நிலை வெக்டர் $2i-j+3k$; எந்தப் புள்ளி பற்றிய திருப்புத்திறன் காணப்படவேண்டுமோ அப்புள்ளி Oவின் நிலைவெக்டர் $= i+2j-k$.

$\therefore$ O பற்றிய திருப்புத்திறன்

$$= \overline{F}\times\overline{PO}$$

$$= (3i+k)\times[i+2j-k-(2i-j+3k)]$$

$$= (3i+k)\times(-i+3j-4k)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -3i+11j+9k$$

திருப்புத்திறனின் அளவு $= \sqrt{9+121+81} = \sqrt{211}$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : $\overline{F} = 4i-3j+2k$ எனும் விசை $(2, -2, 1)$ என்ற புள்ளியில் செயல்படுகிறது. அவ்விசையின் திருப்புத்திறனை (i) $(3, -2, 4)$ என்ற புள்ளி பற்றியும், (ii) x அச்சினைப் பற்றியும் காண்க. (B.Sc. து. பா. ஏப். 68)

ஆய ஆதியாகிய Oவை, வெக்டர் ஆதியாகவும் கொண்டிருப்பதாய்ப் பொருள் கொள்ளவேண்டும்.

$\therefore$ செயல்படு புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $= 2i-2j+k$

$Q\,(3, -2, 4)$ என்ற புள்ளிபற்றிய விசையின் திருப்புத்திறன்

$$= \overline{F}\times\overline{PQ}$$

$$= (4i-3j+2k)\times[3i-2j+4k-(2i-2j+k)]$$

$$= (4i-3j+2k)\times(i+3k)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9i-10j+3k.$$

x அச்சினைப் பற்றிய அவ்விசையின் திருப்புதிறன் காண முதலில் ஆய ஆதியாகிய Oவைப் பற்றிய திருப்புதிறன் காணவேண்டும்.

O-வைப் பற்றிய திருப்புத்திறன்

$$= \overline{F}\times\overline{PO}$$

$$= -\overline{F}\times\overline{OP}$$

$$= \overline{OP}\times\overline{F}$$

$$= (2i-2j+k)\times(4i-3j+2k)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -i+2k$$

இவ்வெக்டரின் கூறு x அச்சின் வழியாக $= (-i+2k)\cdot i = -1$

இதுவே அவ்விசையின் x அச்சினைப் பற்றிய திருப்புத்திறன் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : $-3i+6j+2k$ என்ற வெக்டரின் திசையில் $7\sqrt{2}$ அலகுகள்கொண்ட விசை ஒன்று, $P\,(3, -2, 4)$ என்ற புள்ளியில்

செயல்படுகின்றது. Q $(1, -7, 3)$ என்ற புள்ளிபற்றிய அவ்விசையின் திருப்புத்திறன் காண்க.

$-3i+6j+2k$ என்ற வெக்டரின் எண்ணளவு $= \sqrt{9+36+4} = 7$

$\therefore$ அவ்வெக்டரின் திசையிலுள்ள ஓரலகுவெக்டர் $= \dfrac{-3i+6j+2k}{7}$

$\therefore 7\sqrt{2}$ அலகுகொண்ட விசை வெக்டர் $= \dfrac{7\sqrt{2}\,(-3i+6j+2k)}{7}$

$= \sqrt{2}\,(-3i+6j+2k)$

Qவின் நிலைவெக்டர் $= i-7j+3k$

விசைச் செயல்படும் புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $= 3i-2j+4k$

$\therefore \ \overline{PQ} = (i-7j+3k)-(3i-2j+4k)$

$= -2i-5j-k.$

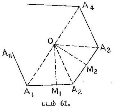
$\therefore$ Q பற்றிய விசையின் திருப்புத்திறன்

$= \overline{F} \times \overline{PQ}$

$= \sqrt{2}\,(-3i+6j+2k) \times (-2i-5j-k)$

$$= \sqrt{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \sqrt{2}\,(4i-7j+27k)$$

எடுத்துக்காட்டு 4: ஒரு மூடிய சமதள பல கோணத்தின் வெக்டர் பரப்பு, அப்பலகோணத்தின் ஒரே முக ஒழுங்கில் எடுக்கப் பட்ட பக்கங்களினால் குறிக்கப் பெறும் விசைகளின், அத்தளத்தில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியைப் பற்றிய திருப்புத்திறன்களின் கூட்டலில் பாதிக்குச் சமம் என நிறுவுக.



படம் 61.

$A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ என்பது ஒரு மூடிய சமதளப் பலகோணம். O என்பது அத்தளத்தில் ஏதோ ஒரு புள்ளி.

$\overline{A_1A_2}$வால் குறிக்கப்பெறும் விசையின் Oவைப்பற்றிய திருப் புத்திறன் $\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1O}$

$= |\overline{A_1A_2}|\,.\,OM,\ \hat{n}$; $\hat{n}$ என் பது பல கோணத்தின் தளத் திற்குச் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர்.

அதாவது $\overline{A_1A_2}$ எனும் விசையின் திருப்புத்திறன் 2 (வெக்டர் பரப்பு OA_1A_2) வால் குறிக்கப்படுகிறது.

இதே போல் $\overline{A_2A_3}$யின் திருப்புத்திறன் $= 2$(வெக்டர் பரப்பு $\triangle OA_2A_3$)

$\overline{A_3A_4}$ன் திருப்புத்திறன் $= 2$(வெக்டர் பரப்பு $\triangle OA_3A_4$)

....

....

$\overline{A_nA_1}$ன் திருப்புத்திறன் $= 2$(வெக்டர் பரப்பு $\triangle OA_nA_1$)

கூட்டினால் விசைகளின் மொத்தத் திருப்புத்திறன்

$= 2(\triangle OA_1A_2 + \triangle OA_2A_3 + \dots + \triangle OA_nA_1)$

$= 2$[பலகோணத்தின் வெக்டர் பரப்பு]

$\therefore$ பலகோணத்தின் வெக்டர் பரப்பு

$= \frac{1}{2}$ [விசைகளின் மொத்தத் திருப்புத்திறன்]

எடுத்துக்காட்டு 5 : ஒரு சமபக்க முக்கோணம் ABCயின் பக்கங்கள் AB, BC, CA வழியாக முறையே P, $2P$, $3P$ எனும் விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் இணைவாக்க விளைவுவிசை BCக்குச் செங்குத்து என்றும், BCயின் நீட்சியில் $\frac{BD}{BC} = \frac{3}{2}$ எனுமாறு அமைந்த புள்ளி Dயின் வழிச் செல்லும் எனவும் நிறுவுக.

BC, CA, AB வழி உள்ள ஓரலகு வெக்டர்கள் முறையே $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ என்க. அப்படியானால் இப்பக்கங்கள் வழிச் செயல்படும் விசைகள் முறையே $2P\hat{e}_1$, $3P\hat{e}_2$, $P\hat{e}_3$ என்றாகும்.

இவ்விசைகளின் இணைவாக்க விளைவு விசை

$$\overline{R} = 2P\hat{e}_1 + 3P\hat{e}_2 + P\hat{e}_3.$$

$\hat{e}_1$ கொண்டு புள்ளிப் பெருக்கல் செய்தால்

$$\overline{R} \cdot \hat{e}_1 = 2P\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 + 3P\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1 + P\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1$$

$$= P\{2 - \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\}$$

$$= 0.$$

எனவே $\overline{R}$, $\hat{e}_1$க்குச் செங்குத்து ; அதாவது BCக்குச் செங்குத்தாய் அமைகிறது என்றாகிறது.

மேலும் Bயைப்பற்றிய $\overline{R}$ன் திருப்புத்திறன், மற்ற விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

$\overline{R}$, BCயை D எனும் புள்ளியிற் சந்தித்தால்,

$\overline{R}$ன் திருப்புத்திறன் $= \overline{BD} \times \overline{R}$

மேலும் BC, AB வழியான விசைகளின் திருப்புத்திறன் பூச்சிய மாகும். ஆகையால், CA வழிச் செயல்படும் விசையின் திருப்புத்திறன் $\overline{BC}\times 3P\hat{e}_2$ என்பது மட்டும்தான் Rன் திருப்புத்திறனுக்குச் சமமாகும்.

$$\therefore\quad \overline{BD}\times \overline{R}=\overline{BC}\times 3P\hat{e}_2.$$

i.e. $\overline{BD}\times P(2\hat{e}_1+3\hat{e}_2+\hat{e}_3)=\overline{BC}\times 3P\hat{e}_2$

i.e. $BD\ \hat{e}_1\times(2\hat{e}_1+3\hat{e}_2+\hat{e}_3)=3\ .\ BC\ \hat{e}_1\times\hat{e}_2$

i.e. $BD(3\sin 120°-\sin 120°)=3BC\sin 120°$

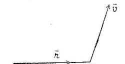
i.e. $BD\ .\ 2=3\ BC.$

$$\therefore\quad \frac{BD}{BC}=\tfrac{3}{2}$$

$\therefore$ இணைவாக்க விளைவு விசை BCயின் நீட்சியில் $BD=\frac{3}{2}BC$ எனுமாறு அமைந்த D எனும் புள்ளி வழிச் செயல்படுகிறது.

§ 3·11. உந்தமும், உந்தத் திருப்புத்திறனும் Momentum and Moment of momentum of a particle)

ஒரு துகளின் பொருண்மை m எனவும், ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் அதன் திசைவேகம் $\overline{V}$ எனவும் இருந்தால் $\overline{M}=m\overline{V}$ எனும் வெக்டர் அத்துகளின் உந்தம் எனப்படும்.



படம் 62.

ஏதேனும் ஒரு கொடுக்கப் பட்ட நேரத்தில் ஒரு துகளின் உந்தம் $\overline{M}$ எனவும், ஏதோ ஒரு புள்ளி Aயினைப் பொறுத்து துகள் Pயின் நிலை வெக்டர் $\overline{r}$ எனவும் இருந்தால்,

$\overline{H}=\overline{AP}\times\overline{M}$ என்ற வெக்டர், அத்துகளின் உந்தத் திருப்புத் திறன் என அழைக்கப்படும். இதனைக் கோண உந்தம் (Angular momentum) எனவும் அழைப்பர்.

பயிற்சி 3

1. $\overline{a}=3i+2j-5k$, $\overline{b}=-i+3j-4k$ எனில் $(\overline{a}+\overline{b})\times(\overline{a}-\overline{b})$ யைக் காண்க.

2. $2i-j+3k$, $-3i-7j+k$, $i-5j+2k$ என்ற நிலை வெக்டர் களுடைய மூன்று புள்ளிகளால் உருவாக்கப்படும் முக்கோணப் பரப்பினைக் காண்க.

3. $6i-j+3k$, $-3i+2j-4k$ எனும் பக்கங்கள் கொண்ட முக்கோணப் பரப்பைக் கணக்கிடுக.

4. $2i+3j-4k$, $4i-j-6k$, என்ற வெக்டர்களை மூலைவிட்டங்களாய் உடைய இணைகரத்தின் பரப்புக் காண்க.

5. $2i+3j-5k$, $4j+2k$ என்ற இரு வெக்டர்களுக்கும் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர் காண்க. (Bsc. ஏப். 70)

6. $\overline{p}+\overline{q}+\overline{r}=0$ எனில் $\overline{q}\times\overline{r}=\overline{r}\times\overline{p}=\overline{p}\times\overline{q}$ எனக் காண்பி. (Bsc. து. பா. செப். 70)

7. $4i+2j-3k$ எனும் புள்ளியில் செயல்படும் $3i+4j-5k$ என்ற விசையின் $2i-3j+4k$ என்ற புள்ளிபற்றிய திருப்புத்திறன் காண்க. (Bsc. து. பா. செப். 63)

8. $(-i+3j+2k)$ எனும் புள்ளியில் செயல்படும் $5i-j+3k$ என்ற விசையின் $i+2j-k$ என்ற புள்ளிபற்றிய திருப்புத்திறன் காண்க.

9. l எனும் நேர் கோட்டுக்கு இணையாக $\overline{a}$ என்ற வெக்டர் உள்ளது. P என்பது மூவளவை வெளியில் அமைந்த, ஆனால் l ன் மேல் அமையாத ஏதோ ஒரு புள்ளி. M என்பது l ல் உள்ள ஒரு புள்ளியெனில் $PM\times\overline{a}$ என்பது M ன் நிலையைச் சார்ந்து அமையவில்லை எனக் காண்பி. வடிவ கணித விளக்கம் கூறுக. (Bsc. து. பா. ஏப். 67)

10. $4i+5j+k$, $-j-k$, $3i+9j+4k$, $-4i+4j+4k$ என்ற முனைகளையுடைய நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் என்ன?

11. $P(-1, 2, 3)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து $A(2, 4, -5)$, $B(7, 4, -6)$ எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிற்குச் செங்குத்துத் தூரத்தினைக் கணக்கிடுக.

12. $P(-1, 2, 6)$-ல் இருந்து $A(1, -4, 3)$ $B(7, -1, -1)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிற்குச் செங்குத்துத் தூரம் காண்க.

13. $P(-1, 2, 7)$-ல் இருந்து $(2, 3, -4)$ என்ற புள்ளிவழி $(6, 3, -4)$ என்ற வெக்டருக்கு இணையான நேர்கோட்டிற்குள்ள செங்குத்துத் தூரத்தினைக் கணக்கிடு.

14. $A(4, -1, -7)$ எனும் புள்ளியில் $(9, 6, -2)$ எனும் வெக்டரின் திசையில் 6 அலகுகள் கொண்ட ஒரு விசை செயல்படுகிறது.

O $(1, -3, 2)$ என்ற புள்ளியைப் பற்றி அவ்விசையின் திருப்புத் திறனை யும், O-வின் வழியே மூவளவை ஆயங்களுக்கு இணையான கோடுகளைப் பற்றிய திருப்புத் திறன்களையும் காண்க.

15. $5i+k$ என்ற விசை $9i-j+2k$ என்ற புள்ளியில் செயல்படு கிறது. $3i+2j+k$ என்ற புள்ளிபற்றிய விசையின் திருப்புத்திறன் என்ன? X, Y, Z அச்சுக்களைப் பற்றிய திருப்புத் திறன்களையும் கணக் கிடுக.

16. $4i-3j+2k$ என்ற புள்ளிவழிச் செயல்படும் $2i-j+5k$ என்ற அறுதியிட்ட வெக்டரின் $i+2j-k$ என்ற புள்ளிபற்றிய திருப்புத்திறன் காண்க. (B.Sc. ஏப். 70)

4. இரண்டுக்கு மேற்பட்ட வெக்டர்களின் பெருக்கல்

§ 4.01. மூன்று வெக்டர்களின் திசையிலிப் பெருக்கல் $\overline{a} \times \overline{b} . \overline{c}$ (Scalar product of three vectors)

$\overline{a} \times \overline{b}$ என்ற வெக்டர் பெருக்கலின் விளைவு ஒரு வெக்டராகும். எனவே இதை வேறொரு வெக்டரான $\overline{c}$யுடன் புள்ளிப் பெருக்கல் செய்யலாம். அவ்வாறு புள்ளிப் பெருக்கல் செய்தால் கிடைப்பது ஒரு திசையிலியாகும். எனவே $\overline{a} \times \overline{b} \cdot \overline{c}$ என்பது மூன்று வெக்டர்களின் திசையிலிப் பெருக்கல்; அல்லது 'அளவை முப்பெருக்கி' (Scalar triple product) எனப்படும். இதனையே கலப்புப் பெருக்கல் (Mixed product) எனவும் அழைப்பர்.

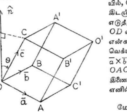
$\overline{a} \times \overline{b} \cdot \overline{c}$ என்ற பெருக்கலில் அடைப்புக் குறியில்லாமலே, முதலில் $\overline{a}$க்கும் $\overline{b}$க்கும் வெக்டர் பெருக்கல் செய்து, பின்னர் அதன் விளைவு வெக்டருடன் $\overline{c}$ஐப் புள்ளிப் பெருக்கல் செய்யவேண்டும் என்பது புரிந்து கொள்ளப்படவேண்டும். ஏனெனில் $\overline{a} \times (\overline{b} \cdot \overline{c})$ என்பது பொருளற்றது. $\overline{b} \cdot \overline{c}$ என்பது திசையிலி; அதனுடன் $\overline{a}$ வெக்டர் பெருக்கலில் ஈடுபட இயலாது.

மேலும் புள்ளிப் பெருக்கல் மாற்றுவிதிக் குட்பட்டது; ஆகையால் $\overline{a} \times \overline{b} \cdot \overline{c}$ என்பதை $\overline{c} \cdot \overline{a} \times \overline{b}$ எனவும் எழுதலாம். இனி இத்திசையிலி முப்பெருக்கத்தின் வடிவ கணித விளக்கம் என்ன என்பதைக் காண்போம்.

§ 4.02. 'அளவை முப்பெருக்கி'யின் வடிவ கணித விளக்கம்

$\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ என்பவை முறையே $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்ற வெக்டர்களைக் குறிக்கட்டும். OA, OB, OCகளை ஒரே புள்ளியிற் கூடும் மூன்று

விளிம்புகளாகக் கொண்ட இணைகரத் திண்மம் (Parallelopiped) வரைக. OA, OB-யை அண்டைப் பக்கங்களாய்க் கொண்ட இணைகரத்தின் தளத்திற்குச் செங்குத்து OD என்க. Dயிலிருந்து காணுகையில், OA-யிலிருந்து OBக்குச் சுழற்சி இடஞ்சுழியாகத் தெரியும்படி OD எடுத்துக்கொள்ளப்படல் வேண்டும். OD வழி யமையும் ஓரலகுவெக்டர் $\hat{n}$ என்க. அப்படியானால் $\overline{a}\times\overline{b}$ என்ற வெக்டர் OD வழியமையும். மேலும் $\overline{a}\times\overline{b}$ன் எண்ணளவு, இணைகரம் OAC^1Bன் பரப்புக்குச் சமமாகும். இணைகரம் OAC^1Bன் பரப்பு A எனில் $\overline{a}\times\overline{b}=A\hat{n}$.



படம் 63.

மேலும் ODயில் OC-யின் வீழல் இணைகரத் திண்மத்தின் உயரமாகும்.

i.e. $\overline{OC}\cdot\hat{n}=\overline{c}\cdot\hat{n}$ என்பது இணைகரத் திண்மத்தின் உயரமாகும்.

இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவு = அடிப்பக்கப் பரப்பு $\times$ உயரம்;

$$\text{எனவே } \overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c} = An\cdot\overline{c}$$
$$= A\times\text{உயரம்}$$
$$= \text{இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவு.}$$

இவ்வாறு மூன்று வெக்டர்களின் அளவை முப்பெருக்கம், அம் மூன்று வெக்டர்களை ஒரு முனையிற் கூடும் மூன்று விளிம்புகளாய்க் கொண்ட ஓர் இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவுக்குச் சமம் எனக் காண்கிறோம்.

மேலும் $\overline{b}\times\overline{c}\cdot\overline{a}$ என்றாலும், $\overline{c}\times\overline{a}\cdot\overline{b}$ என்றாலும், இதே இணைகரத் திண்மத்தின் கன அளவே கிடைக்கும். எனவே அளவை முப்பெருக்கத்தில், வெக்டர்களை வட்டச் சுழற்சிமுறையில் (Cyclic order) மாற்றியமைத்தாலும் மதிப்பு மாறுவதில்லை என்பது புலனாகும். ஆனால் வட்டச் சுழற்சியல்லாத முறையில் மாற்றினால், மதிப்பின் குறியீடு மாறிவிடும். எடுத்துக்காட்டாக $\overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c}$ என்பதற்குப் பதில் $\overline{b}\times\overline{a}\cdot\overline{c}$ என எழுதினால் முதல் மதிப்பின் குறியீடும் இரண்டாவது மதிப்பின் குறியீடும் நேர் எதிராக இருக்கும்.

வரையறையிலிருந்து, மூன்று வெக்டர்களின் திசையிலிப் பெருக்கல் எடுக்கும்போது, இருவெக்டர்கள் சமமாயிருந்தால், அப்பெருக்கலின்

மதிப்பு பூச்சியமாகும். அதாவது மூன்றில் இருவெக்டர்கள் ஒன்றி விடுவதால் இணைகரத்திண்மம் கிடைப்பதில்லை. ஒரேதளத்தில் அமைந்த ஓர் இணைகரம்தான் கிடைக்கும். எனவே கன அளவு பூச்சிய மாகிறது.

இதனையே வேறொரு வழியிலும் காணலாம். $\overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{a}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால், வட்டச் சுழற்சிமுறையில் வெக்டர்களை மாற்றும் போது $\overline{a}\times\overline{a}\cdot\overline{b}$ எனவும் $\overline{b}\times\overline{a}\cdot\overline{a}$ எனவும் கிடைக்கும். இம்மாதிரி மாற்றினால் மதிப்பு மாறாது எனக் கண்டோம். எனவே இம்மூன்றும் சமமதிப்புடையன. ஆனால் $\overline{a}\times\overline{a}=0$.

∴ இம்மூன்றும் பூச்சியமாகின்றன.

இன்னொரு முறையிலும் இதனை விளக்கலாம். $\overline{a}\times\overline{b}$ என்ற வெக்டர், $\overline{a}$, $\overline{b}$ இரண்டிற்கும் செங்குத்தாயிருக்கும். எனவே $\overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{a}$ என்று $\overline{a}$-யுடன் புள்ளிப் பெருக்கல் எடுத்தால் மதிப்பு பூச்சியமாகும்.

$\overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c}=\overline{b}\times\overline{c}\cdot\overline{a}$ எனக் கண்டோம். புள்ளிப் பெருக்கல் மாற்று விதிக்குட்பட்டதாகையால்

$$\overline{b}\times\overline{c}\cdot\overline{a} = \overline{a}\cdot\overline{b}\times\overline{c}$$
$$\therefore\quad \overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c} = \overline{a}\cdot\overline{b}\times\overline{c}$$

அதாவது வெக்டர்களை மாற்றாமல், புள்ளியையும் பெருக்கற் குறியை (×)யும் இடம்மாற்றிக் கொள்ளலாம். அதனால் திசையிலி முப் பெருக்கத்தின் மதிப்பு மாறாது என்பது பெறப்படுகிறது.

§ 4·03. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, எனும் மூன்று வெக்டர்கள் ஒரே தளத்தில் இருந்தால், $\overline{a}\times\overline{b}$ என்ற வெக்டர் $\overline{a}$க்கும், $\overline{b}$க்கும், $\overline{c}$க்கும் செங்குத்தாகும்

∴ $\overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c} = 0$ என்றாகும்.

அதாவது திசையிலி முப்பெருக்கம் பூச்சியமாகிறது. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்பவை வேறுபட்டவையாயுள்ள போது, இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும். அதாவது, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்பன வேறுபட்ட, ஒரே கோட்டிலமையாத மூன்று வெக்டர்களாயிருந்து, அவற்றின் திசையிலி முப்பெருக்கம் பூச்சிய மாயின், அம்மூன்று வெக்டர்களும் ஒரே தளத்தில் அமையும்.

$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்ற வெக்டர்களின் திசையிலி முப்பெருக்கத்தினை $[\,\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\,]$ எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம். எனவே $[\,\overline{a}\;\overline{b}\;\overline{c}\,] = 0$ எனில் மூன்றில் இரு வெக்டர்கள் சமமாகவோ அல்லது இணையாகவோ இருக்கலாம். அல்லது மூன்றும் ஒரேதளத்தில் அமையும்.

§ **4·04.** $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ என்ற வெக்டர்கள், $\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}$ என்ற ஒரே தள அமைவில்லாத ஏதோ மூன்று வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்வுகளாகக் கொடுக்கப்பட்டால், $[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}]$ன் மதிப்புக் காணல்

($\overline{l}, \overline{m}, \overline{n}$ ஓரலகு வெக்டர்களாக அமைய வேண்டியதில்லை.)

$$\overline{a} = a_1\overline{l} + a_2\overline{m} + a_3\overline{n}$$

$$\overline{b} = b_1\overline{l} + b_2\overline{m} + b_3\overline{n}$$

$$\overline{c} = c_1\overline{l} + c_2\overline{m} + c_3\overline{n}\ ;\ \text{என்க.}$$

$$\therefore\quad \overline{a}\times\overline{b} = (a_1\overline{l} + a_2\overline{m} + a_3\overline{n})\times(b_1\overline{l} + b_2\overline{m} + b_3\overline{n})$$

$$= a_1b_1\overline{l}\times\overline{l} + a_1b_2\overline{l}\times\overline{m} + a_1b_3\overline{l}\times\overline{n} + a_2b_1\overline{m}\times\overline{l} + a_2b_2\overline{m}\times\overline{m} + a_2b_3\overline{m}\times\overline{n} + a_3b_1\overline{n}\times\overline{l} + a_3b_2\overline{n}\times\overline{m} + a_3b_3\overline{n}\times\overline{n}.$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)\,\overline{l}\times\overline{m} + (a_2b_3 - a_3b_2)\overline{m}\times\overline{n} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\overline{n}\times\overline{l}$$

$$\therefore\quad \overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c} =$$

$$\{(a_1b_2 - a_2b_1)\,\overline{l}\times\overline{m} + (a_2b_3 - a_3b_2)\overline{m}\times\overline{n} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\overline{n}\times\overline{l}\}\cdot(c_1\overline{l} + c_2\overline{m} + c_3\overline{n})$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)c_3\,(\overline{l}\times\overline{m}\cdot\overline{n}) + (a_2b_3 - a_3b_2)\,c_1\,(\overline{m}\times\overline{n}\cdot\overline{l}) + (a_3b_1 - a_1b_3)\,c_2\,(\overline{n}\times\overline{l}\cdot\overline{m})$$

{ஏனெனில் $\overline{l}\times\overline{m}\cdot m = \overline{l}\times\overline{m}\cdot\overline{l} = m\times\overline{n}\cdot m = \overline{m}\times\overline{n}\cdot\overline{n} = \overline{n}\times\overline{l}\cdot\overline{l} = \overline{n}\times\overline{l}\cdot\overline{n} = 0$}

$$\therefore\quad \overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c} = (a_1b_2 - a_3b_1)\ c_3\,[\overline{l}\ \overline{m}\ \overline{n}] + (a_2b_3 - a_3b_2)\ c_1\,[\overline{m}\ \overline{n}\ \overline{l}] + (a_3b_1 - a_1b_3)\ c_2\,[\overline{n}\ \overline{l}\ \overline{m}]$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c, & c_2 & c_3 \end{vmatrix} [\overline{l}\ \overline{m}\ \overline{n}] \qquad \{\because\ [\overline{l}\ \overline{m}\ \overline{n}] = [\overline{m}\ \overline{n}\ \overline{l}] = [\overline{n}\ \overline{l}\ \overline{m}]\}$$

i.e. $$[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_2 & c_2 & c_2 \end{vmatrix} [\overline{l}\ \overline{m}\ \overline{n}]$$

வழிமுடிவு **1:**

குறிப்பாக $\overline{a} = a_1i + a_2j + a_3k$;

$\overline{b} = b_1i + b_2j + b_3k$;

$\overline{c} = c_1i + c_2j + c_3k$; எனில்,

$$[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} [ijk]\ \text{ஆகும்.}$$

ஆனால் $[ijk] = i\times j\cdot k$

$= k\cdot k$

$= 1$

$$\therefore\ [\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

குறிப்பு: (a_1, a_2, a_3) (b_1, b_2, b_3) (c_1, c_2, c_3) $(0, 0, 0)$ என்ற மூனை களுடைய இணைகரத்திண்மத்தின் கன அளவுகாணப் பயன்படும் வாய்பாடாக மேற்கண்ட மதிப்பு மூவளவை ஆயத்தொலைவடிவ கணிதத்தில் பயன்படுகிறது.

வழிமுடிவு 2: $\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$ என்ற பங்கீட்டு விதியை (அளவை முப்பெருக்கி முறையில்) நிறுவ.

$\overline{p}$ என்பது ஏதோ ஒருவெக்டர் என்க. அவ்வாறுயின்

$$\overline{p}\cdot\{\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})-\overline{a}\times\overline{b}-\overline{a}\times\overline{c}\}$$

$$= \overline{p}\cdot\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})-\overline{p}\cdot\overline{a}\times\overline{b}-\overline{p}\cdot\overline{a}\times\overline{c}$$

(ஏனெனில் புள்ளிப்பெருக்கல் பங்கீட்டுவிதியைப் பின்பற்றுகிறது.)

$$= (\overline{p}\times\overline{a})\cdot(\overline{b}+\overline{c})-(\overline{p}\times\overline{a})\cdot\overline{b}-\overline{p}\times\overline{a}\cdot\overline{c}$$

(ஏனெனில் திசையிலி முப்பெருக்கத்தில் புள்ளியையும் $\times$வையும் இடமாற்றிக் கொள்ளலாம்; மதிப்பு மாறுவதில்லை.)

$$= (\overline{p}\times\overline{a})\cdot\overline{b}+(\overline{p}\times\overline{a})\cdot\overline{c}-(\overline{p}\times\overline{a})\cdot\overline{b}-(\overline{p}\times\overline{a})\cdot\overline{c}$$

$$= 0.$$

$\overline{p}$ன் எந்த மதிப்புக்கும் இது உண்மையாவதால்,

$\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$ என்று இருக்கவேண்டும். ஏனெனில் இருவெக்டர்களின் புள்ளிப் பெருக்கல் பூச்சியமானுல், ஏதாவது ஒன்று பூச்சியமாயிருக்கும்; அல்லது இரண்டிற்குமிடைப்பட்ட கோணம் 90°ஆக இருக்கவேண்டும். இங்கு நாம் எடுத்துக்கொண்டது $\overline{p}$ எனும் ஏதோ ஒரு வெக்டர். எனவே அது 0 என்றோ, அல்லது மற்ற வெக்டருக்குச் செங்குத்தாகவோ இருக்கவேண்டும் என்ற நியதியில்லை. எனவே,

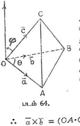
$$\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})-\overline{a}\times\overline{b}-\overline{a}\times\overline{c} = 0$$

$$\therefore\ \overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}.$$

வழிமுடிவு 3: பங்கீட்டுவிதி, புள்ளிப் பெருக்கலுக்கும் வெக்டர் பெருக்கலுக்கும் பொருந்துவதால், திசையிலி முப்பெருக்கலுக்கும் பொருந்தும். அதாவது,

$$[\overline{a}, \overline{b}+\overline{c}, \overline{d}+\overline{e}] = [\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{d}]+[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{e}]+[\overline{a}\ \overline{c}\ \overline{d}]+[\overline{a}\ \overline{c}\ \overline{e}]$$

§ 4·05. நான்முகியின் கன அளவு (Volume of a tetrahedron)



படம் 64.

$OABC$ என்பது நான்முகி. Oவினை ஆதியாய்க்கொண்டு A, B, Cயின் நிலை வெக்டர்கள் $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்க. OABயின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாய், $\overline{OA}$, $\overline{OB}$யுடன் வலக்கை அமைப்புடையதாய் $\hat{n}$ என்ற ஓரலகு வெக்டர் எடுத்துக்கொள்க. $A\hat{O}B = \theta$ எனவும், $\hat{n}$க்கும் $\overline{OC}$க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் φ எனவும் கொள்க.

$$\therefore \quad \overline{a}\times\overline{b} = (OA\cdot OB \sin\theta)\,\hat{n}$$
$$= 2\,(\triangle OAB\text{யின் பரப்பு})\,\hat{n}$$
$$\therefore \; \overline{c}\cdot(\overline{a}\times\overline{b}) = OC\cos\varphi \,.\, 2(\triangle OAB\text{யின் பரப்பு})$$

ஆனால் நான்முகியின் கனஅளவு,

$$= \tfrac{1}{3}\,(\triangle OAB\text{யின் பரப்பு})\times\text{உயரம்}$$
$$= \tfrac{1}{6}\,(\overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c})$$
$$= \frac{[\overline{a}\;\overline{b}\;\overline{c}]}{6}$$

குறிப்பு : $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ ஒரு புள்ளியிற் கூடும் விளிம்புகளாய் உடைய இணைகரத்திண்மத்தின் கன அளவில் ஆறில் ஒருபங்கு தான் நான்முகியின் கன அளவாகும்.

$$\overline{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k\,;$$
$$\overline{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k\,;$$
$$\overline{c} = c_1 i + c_2 j + c_3 k\,;$$
$$\overline{d} = d_1 i + d_2 j + d_3 k\,; \text{ என்க.}$$

$ABCD$ என்ற நான்முகியின் முனைகளின் நிலை வெக்டர்கள் மேலே கொடுக்கப்பட்ட $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ என்க.

அப்படியானால் அதன் கன அளவு

$$= \tfrac{1}{6}\,(\overline{AB}\times\overline{AC}\cdot\overline{AD})$$
$$= \tfrac{1}{6}\,\{(\overline{b}-\overline{a})\times(\overline{c}-\overline{a})\cdot(\overline{d}-\overline{a})\}$$

$$= \frac{1}{6}\{(\overline{b}\times\overline{c}-\overline{b}\times\overline{a}-\overline{a}\times\overline{c})\cdot(\overline{d}-\overline{a})\}$$
$$= \frac{1}{6}\{\overline{b}\times\overline{c}\cdot d+\overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{d}+\overline{c}\times\overline{a}\cdot\overline{d}-\overline{b}\times\overline{c}\cdot\overline{a}\}$$
$$= \frac{1}{6}\{[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{d}]+[\overline{b}\ \overline{c}\ \overline{d}]+[\overline{c}\ \overline{a}\ \overline{d}]-[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}]\}.$$

ஆனால் $[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{d}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$$[\overline{b}\ \overline{c}\ \overline{d}] = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \qquad [\overline{c}\ \overline{a}\ \overline{d}] = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\therefore$ கன அளவு $= \frac{1}{6}\left\{ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right\}$

$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$ ஆகும்.

§ 4·06. நிலையியலில் திசையிலி முப்பெருக்கத்தின் பயன்

ஒரு புள்ளியைச் சமநிலையில் வைக்கும் நான்கு விசைகள் :

F_1, F_2, F_3, F_4 என்ற நான்கு விசைகள் $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ என்ற ஓரலகு வெக்டர்களின் திசைகளில் ஒரு புள்ளியில் செயல்பட்டு அப்புள்ளியைச் சமநிலையில் நிறுத்துகின்றன எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad F_1\hat{a}+F_2\hat{b}+F_3\hat{c}+F_4\hat{d}=0 \text{—(1)}$$

$\overline{b}\times\overline{c}$ என்ற வெக்டரைக் கொண்டு புள்ளிப் பெருக்கல் செய்தால்,

$$F_1\hat{a}\cdot\hat{b}\times\hat{c}+F_2\hat{b}\cdot\hat{b}\times\hat{c}+F_3\hat{c}\cdot\hat{b}\times\hat{c}+F_4\hat{d}\cdot\hat{b}\times\hat{c}=0$$

இங்கு $\hat{b}\cdot\hat{b}\times\hat{c}$, $\hat{c}\cdot\hat{b}\times\hat{c}$ ஆகியவை பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \quad F_1[\hat{a}\ \hat{b}\ \hat{c}] + F_4[\hat{b}\ \hat{c}\ \hat{d}] = 0 \text{—(2)}$$

இதேபோன்று (1)உடன் $\overline{c}\times\overline{a}$ என்ற வெக்டர் கொண்டு புள்ளிப் பெருக்கல் செய்தால்,

$$F_2[\hat{b}\ \hat{c}\ \hat{a}] + F_4[\hat{c}\ \hat{a}\ \hat{d}] = 0 \text{—(3)}$$

(1)உடன் $\hat{a} \times \hat{b}$ஐக் கொண்டு புள்ளிப் பெருக்கல் செய்தால்,

$$F_3 [\hat{c}\hat{a}\hat{b}] + F_4 [\hat{a}\hat{b}\hat{d}] = 0 \text{—}(4)$$

$$[\hat{a}\hat{b}\hat{c}] = [\hat{b}\hat{c}\hat{a}] = [\hat{c}\hat{a}\hat{b}]$$

எனவே (2), (3), (4)ல் இருந்து

$$\frac{F_1}{[\hat{b}\hat{c}\hat{d}]} = \frac{F_2}{[\hat{c}\hat{a}\hat{d}]} = \frac{F_3}{[\hat{a}\hat{b}\hat{d}]} = \frac{-F_4}{[\hat{a}\hat{b}\hat{c}]}.$$

இதுபோன்றே மூன்று விசைகள் ஒரு புள்ளியில் செயல்பட்டு அப்புள்ளியைச் சமநிலையில் நிறுத்துமானால்,

$$F_1\hat{a} + F_2\hat{b} + F_3\hat{c} = 0 \quad (1)$$

முழுவதும் $\hat{b}$யுடன் வெக்டர் பெருக்கல் எடுத்தால்,

$$F_1\hat{a}\times\hat{b} + F_3\hat{c}\times\hat{b} = 0$$

i.e. $F_1\hat{a}\times\hat{b} - F_3\hat{b}\times\hat{c} = 0$

i.e. $\dfrac{F_1}{\hat{b}\times\hat{c}} = \dfrac{F_3}{\hat{a}\times\hat{b}}$.

சமன்பாடு (1)ல் இருந்து, $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ என்பவை சமதள வெக்டர்கள் என்பது பெறப்படும். $(\hat{b}, \hat{c})$, $(\hat{c}, \hat{a})$, $(\hat{a}, \hat{b})$ ஆகியவற்றிற்கு இடைப் பட்ட கோணங்கள் முறையே α, β, γ எனக் கொண்டால் $\dfrac{F_1}{\sin\alpha} = \dfrac{F_3}{\sin\gamma}$

இதேபோல் $\hat{c}$யுடன் வெக்டர் பெருக்கல் செய்ய,

$$F_1\hat{a}\times\hat{c} + F_2\hat{b}\times\hat{c} = 0$$

i.e. $F_2\hat{b}\times\hat{c} - F_1\hat{c}\times\hat{a} = 0$

i.e. $\dfrac{F_2}{\hat{c}\times\hat{a}} = \dfrac{F_1}{\hat{b}\times\hat{c}}$ i.e. $\dfrac{F_2}{\sin\beta} = \dfrac{F_1}{\sin\alpha}$

$$\therefore \frac{F_1}{\hat{b}\times\hat{c}} = \frac{F_2}{\hat{c}\times\hat{a}} = \frac{F_3}{\hat{a}\times\hat{b}}$$

i.e. $\dfrac{F_1}{\sin\alpha} = \dfrac{F_2}{\sin\beta} = \dfrac{F_3}{\sin\gamma}$

இதுவே லாமியின் தேற்றம் என்பதாகும்.

§ 4·07. மூன்று வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கல் அல்லது வெக்டர் முப்பெருக்கி (Vector Triple Product)

முறை I: $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = (\bar{a}\cdot\bar{c})\,\bar{b} - (\bar{a}\cdot\bar{b})\,\bar{c}$ என நிறுவுதல்:

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ என்பன ஏதோ மூன்று வெக்டர்கள். $\bar{c}$யின் வழி ஓரலகு வெக்டர் k என்க. எனவே c_3 எனும் எண் $\bar{c} = c_3 k$ எனுமாறு காண இயலும். $\bar{c}$யும் $\bar{b}$யும் இருக்கும் தளத்தில் $\bar{c}$க்குச் செங்குத்தாய் j என்ற

ஓரலகு வெக்டர் எடுத்துக் கொள்க. அப்படியானால் $\overline{b}$ என்ற வெக்டரை $b_2 j + b_3 k$ என, j, kயின் ஒருபடிச் சேர்வாக எழுத இயலும். b_2, b_3 என்பன ஏதோ தகுந்த எண்கள்.

j, kயுடன் வலக்கை அமைப்புக்கொண்ட i என்ற ஓரலகு வெக்டரை எடுத்துக்கொண்டால், $\overline{a}$ என்ற வெக்டரை $a_1 i + a_2 j + a_3 k$ என எழுத இயலும்; a_1, a_2, a_3 என்பன ஏதோ தகுந்த எண்கள்.

$$\text{எனவே } \overline{b}\times\overline{c} = (b_2 j + b_3 k)\times c_3 k$$
$$= b_2\, c_3\, j \times k$$
$$= b_2\, c_3\, i \qquad \{\because\ j\times k = i\,;\ k\times k = 0\}$$
$$\therefore\ \overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}) = (a_1 i + a_2 j + a_3 k)\times b_2 c_3 i$$
$$= a_2\, b_2\, c_3\, j\times i + a_3\, b_2\, c_3\, k\times i$$
$$= -a_2 b_2 c_3 i\times j + a_3 b_2 c_3 k\times i$$
$$= -a_1 b_2 c_3 k + a_3 b_2 c_3 j$$
$$(\overline{a}\cdot\overline{c})\,\overline{b} = \{(a_1 i + a_2 j + a_3 k)\cdot c_3 k\}\,\overline{b}$$
$$= a_3\, c_3\, \overline{b} \qquad (\because\ i\cdot k = j\cdot k = 0)$$
$$= a_3\, c_3\,(b_2 j + b_3 k)$$
$$(\overline{a}\cdot\overline{b})\,\overline{c} = \{(a_1 i + a_2 j + a_3 k)\cdot(b_2 j + b_3 k)\}\, c_3 k$$
$$= (a_2 b_2 + a_3 b_3) c_3 k$$
$$\therefore\ (\overline{a}\cdot\overline{c})\,\overline{b} - (\overline{a}\cdot\overline{b})\,\overline{c}$$
$$= a_3 c_3 (b_2 j + b_3 k) - (a_2 b_2 + a_3 b_3) c_3 k$$
$$= a_3 b_2 c_3 j + a_3 b_3 c_3 k - a_2 b_2 c_3 k - a_3 b_3 c_3 k$$
$$= a_3 b_2 c_3 j - a_2 b_2 c_3 k$$
$$= \overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})$$

இவ்வாறு $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}) = (\overline{a}\cdot\overline{c})\,\overline{b} - (\overline{a}\cdot\overline{b})\,\overline{c}$.

அதாவது ஓரவெக்டர்களின் புள்ளிப் பெருக்கலால் நடுவெக்டரைப் பெருக்கியதிலிருந்து, அடைப்பில் இல்லாத வெக்டருடன் நடுவெக்டரின் புள்ளிப் பெருக்கலால் மூன்றாவது வெக்டரைப் பெருக்கிக் கழிக்க வேண்டும். இந்த முறை $(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c}$ என இருந்தாலும் பொருந்தும். ஏனெனில்,

$$(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c} = (\overline{a}\cdot\overline{c})\overline{b} - (\overline{b}\cdot\overline{c})\overline{a}$$

குறிப்பு: $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}) = (\overline{a}\cdot\overline{c})\overline{b} - (\overline{a}\cdot\overline{b})\overline{c}$

ஆனால் $(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c} = (\overline{a}\cdot\overline{c})\overline{b} - (\overline{b}\cdot\overline{c})\overline{a}$.

எனவே இவ்விரு வெக்டர்களும் வேறானவை என்பது வெளிப்படை. அதாவது மூன்று வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கல் காணும்போது

முதலில் எந்த இரு வெக்டர்களுக்கிடையே வெக்டர் பெருக்கல் காணப் படுகிறது என்பதை ஓர் அடைப்புக் குறியின் மூலம் தெளிவாக்க வேண்டும்.

முறை II : $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}) = (\overline{a}\cdot\overline{c})\,\overline{b} - (\overline{a}\cdot\overline{b})\,\overline{c}$ என நிறுவுதல்.

$$\overline{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k\,;$$
$$\overline{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k\,;$$
$$\overline{c} = c_1 i + c_2 j + c_3 k\,; \text{ என்க.}$$

$$\therefore\ \overline{b}\times\overline{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (b_2c_3 - b_3c_2)i + (b_3c_1 - b_1c_3)j + (b_1c_2 - b_2c_1)k$$

$$\therefore\ \overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}) = (a_1 i + a_2 j + a_3 k)\times[\,\Sigma\,(b_2c_3 - b_3c_2)i\,]$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2, & b_3c_1 - b_1c_3, & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix}$$

$$= i\,\{a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)\} +$$
$$j\,\{a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1)\} +$$
$$k\,\{a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)\}$$

மேலும்,

$$(\overline{a}\cdot\overline{c})\,\overline{b} = [\,(a_1 i + a_2 j + a_3 k)\cdot(c_1 i + c_2 j + c_3 k)\,]\,(b_1 i + b_2 j + b_3 k)$$
$$= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\,(b_1 i + b_2 j + b_3 k)$$

இதேபோன்று,

$$(\overline{a}\cdot\overline{b})\,\overline{c} = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\,(c_1 i + c_2 j + c_3 k)$$

$$\therefore\ (\overline{a}\cdot\overline{c})\,\overline{b} - (\overline{a}\cdot\overline{b})\,\overline{c}$$
$$= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\,(b_1 i + b_2 j + b_3 k) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\,(c_1 i + c_2 j + c_3 k)$$

$$= i\,\{a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 - a_1b_1c_1 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1\}$$
$$+ j\,\{a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_2c_3 - a_1b_1c_2 + a_2b_2c_2 - a_3b_3c_2\}$$
$$+ k\,\{a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 + a_3b_3c_3 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 - a_3b_3c_3\}$$

$$= i\,\{a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)\} +$$
$$j\,\{a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1)\} +$$
$$k\,\{a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)\}$$

$$= \overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})$$

§ 4·08. வெக்டரின் கூறுகள் (Resolutes of a vector)

$\overline{r}$ என்பது ஒரு வெக்டர். இதனை $\overline{a}$ என்ற வெக்டரின் திசையில் ஒரு கூறும், அதற்குச் செங்குத்துத் திசையில் ஒரு கூறுமாகப் பிரிக்க வேண்டும்.

$\overline{a}$ன் திசையில் உள்ள ஓரலகு வெக்டர் $\dfrac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \hat{e}$ என்க.

$\therefore$ $\overline{a}$ன் திசையில் $\overline{r}$ன் கூறு $= (\overline{r}\cdot\hat{e})\,\hat{e}$.

$\overline{a}$க்குச் செங்குத்துத் திசையில் அமைந்த கூறு

$$= \overline{r} - (\overline{r}\cdot\hat{e})\,\hat{e}$$

$$= \overline{r} - \frac{(\overline{r}\cdot\overline{a})}{|\overline{a}|}\,\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$$

$$= \overline{r} - \frac{(\overline{r}\cdot\overline{a})\,\overline{a}}{|\overline{a}|^2}$$

$$= \frac{|\overline{a}|^2\overline{r} - (\overline{r}\cdot\overline{a})\,\overline{a}}{|\overline{a}|^2}$$

$$= \frac{(\overline{a}\cdot\overline{a})\,\overline{r} - (\overline{r}\cdot\overline{a})\,\overline{a}}{|\overline{a}|^2}$$

$$= \frac{\overline{a}\times(\overline{r}\times\overline{a})}{|\overline{a}|^2}$$

முறை III : $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}) = (\overline{a}\cdot\overline{c})\,\overline{b} - (\overline{a}\cdot\overline{b})\,\overline{c}$.

$\overline{b}\times\overline{c}$ எனும் வெக்டர் $\overline{b}$க்கும் $\overline{c}$க்கும் செங்குத்து.

$\therefore$ $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})$ எனும் வெக்டர் $\overline{b}$, $\overline{c}$யின் தளத்தில் அமையும்.

$\therefore$ $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}) = l\overline{b} + m\overline{c}$ எனும்படி l, m எனும் இரு தருந்த எண்கள் காண இயலும்.

மேலும், $a\times(\overline{b}\times\overline{c})$, $\overline{a}$க்குச் செங்குத்தாகையால்

$\overline{a}\cdot[a\times(\overline{b}\times\overline{c})] = 0$ ஆகும்.

அதாவது $\overline{a}\cdot[l\overline{b} + m\overline{c}] = 0$.

$l\overline{a}\cdot\overline{b} + m\overline{a}\cdot\overline{c} = 0$.

$$\therefore\ m = \frac{l\,\overline{a}\cdot\overline{b}}{\overline{a}\cdot\overline{c}}.$$

$$\therefore\ \overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}) = l\overline{b} - \frac{l(\overline{a}\cdot\overline{b})\,c}{(\overline{a}\cdot\overline{c})}.$$

$$= \frac{l\,\{(\overline{a}\cdot\overline{c})\,\overline{b} - (\overline{a}\cdot\overline{b})\,\overline{c}\}}{\overline{a}\cdot\overline{c}}.$$

$$= n\,\{(\overline{a}\cdot\overline{c})\,\overline{b} - (\overline{a}\cdot\overline{b})\,\overline{c}\}$$ என்க.

(ஏனெனில் l, $\overline{a}\cdot\overline{c}$ இரண்டுமே திசையிலிகள்; எனவே $\frac{l}{\overline{a}\cdot\overline{c}} = n$ எனக் கொள்கிறோம்.)

இனி இப்பெருக்கல் $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$யின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பொருந்துமாகையால், $\overline{a} = i$; $\overline{b} = j$; $\overline{c} = i$; என்றால்,

$$\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}) = i\times(j\times i) = i\times(-k) = -(i\times k) = k\times i = j$$

வலது பக்கத்து மதிப்பு $= n\{(\overline{a}\cdot\overline{c})\overline{b} - (\overline{a}\cdot\overline{b})\overline{c}\}$

$$= n\{(i\cdot i)j - (i\cdot j)i\}$$
$$= n\{j - 0\}$$

$= nj$ என்றாகும்.

$\therefore$ $n = 1$ எனத் தெரிகிறது.

அதாவது, $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}) = (\overline{a}\cdot\overline{c})\overline{b} - (\overline{a}\cdot\overline{b})\overline{c}$.

§ 4·09. நான்கு வெக்டர்களின் திசையிலிப் பெருக்கல் (Scalar product of four vectors)

$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ என்பவை நான்கு வெக்டர்கள் எனில், $\overline{a}\times\overline{b}$; $\overline{c}\times\overline{d}$ என்ற இரு வெக்டர்களின் புள்ளிப் பெருக்கல் $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot(\overline{c}\times\overline{d})$ஐத் தான் நான்கு வெக்டர்களின் திசையிலிப் பெருக்கல் என்கிறோம். இனி இப்பெருக்கலின் மதிப்பைக் காணுவோம்.

$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot(\overline{c}\times\overline{d}) = (\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{p}$ என்க.

புள்ளியையும் $\times$வையும் இடமாற்றம் செய்யலாம் என்ற விதியின்படி

$$= \overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{p})$$
$$= \overline{a}\cdot\{\overline{b}\times(\overline{c}\times\overline{d})\}$$
$$= \overline{a}\cdot\{(\overline{b}\cdot\overline{d})\overline{c} - (\overline{b}\cdot\overline{c})\overline{d}\}.$$
$$= (\overline{a}\cdot\overline{c})(\overline{b}\cdot\overline{d}) - (\overline{a}\cdot\overline{d})(\overline{b}\cdot\overline{c})$$
$$= \begin{vmatrix} \overline{a}\cdot\overline{c} & \overline{a}\cdot\overline{d} \\ \overline{b}\cdot\overline{c} & \overline{b}\cdot\overline{d} \end{vmatrix}$$

குறிப்பாக, $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot(\overline{a}\times\overline{b}) = \begin{vmatrix} \overline{a}\cdot\overline{a} & \overline{a}\cdot\overline{b} \\ \overline{b}\cdot\overline{a} & \overline{b}\cdot\overline{b} \end{vmatrix}$

$$= (\overline{a}\cdot\overline{a})(\overline{b}\cdot\overline{b}) - (\overline{a}\cdot\overline{b})^2$$
$$= \overline{a}^2\,\overline{b}^2 - (\overline{a}\cdot\overline{b})^2$$

§ 4·10. நான்கு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கல்

$(\overline{a}\times\overline{b})\times(\overline{c}\times\overline{d})$ன் மதிப்புக் காணுதல்.

இப்பெருக்கலின் மதிப்பை இருவழிகளில் காணலாம்.

$(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d}) = (\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{p}$ என்க.

$\therefore \; = (\bar{a}\cdot\bar{p})\bar{b} - (\bar{b}\cdot\bar{p})\bar{a}$

(மூன்று வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கல் விதிப்படி)

$= \{\bar{a}\cdot(\bar{c}\times\bar{d})\}\,\bar{b} - \{\bar{b}\cdot(\bar{c}\times\bar{d})\}\,\bar{a}.$

$= [\bar{a}\;\bar{c}\;\bar{d}]\,\bar{b} - [\bar{b}\;\bar{c}\;\bar{d}]\,\bar{a}$ ....(1)

மேலும் $(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d}) = \bar{q}\times(\bar{c}\times\bar{d})$ எனில்

$= [\bar{q}\cdot\bar{d}]\,\bar{c} - [\bar{q}\cdot\bar{c}]\,\bar{d}$

$= \{(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{d}\}\,\bar{c} - \{(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}\}\,\bar{d}$

$= [\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{d}]\,\bar{c} - [\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}]\,\bar{d}$ ....(2)

(1)ல் $(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})$யின் மதிப்பு $\bar{a}, \bar{b}$ களிலும்,

(2)ல் $\bar{c}, \bar{d}$ களின் மதிப்புகளிலும் எழுதப்பட்டுள்ளது.

(1)ல் இருந்து (2)ஐக் கழித்தால்,

$[\bar{a}\;\bar{c}\;\bar{d}]\,\bar{b} - [\bar{b}\;\bar{c}\;\bar{d}]\,\bar{a} - [\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{d}]\,\bar{c} + [\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}]\,\bar{d} = 0.$

$[\bar{c}\;\bar{d}\;\bar{a}] = -[\bar{d}\;\bar{c}\;\bar{a}]$ என்பதால்,

மேற்கண்ட தொடர்பு

$-[\bar{d}\;\bar{c}\;\bar{a}]\,\bar{b} - [\bar{b}\;\bar{c}\;\bar{d}]\,\bar{a} - [\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{d}]\,\bar{c} + [\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}]\,\bar{d} = 0.$

முழுதும் குறியீட்டை மாற்றினால்

i.e. $[\bar{b}\;\bar{c}\;\bar{d}]\,\bar{a} + [\bar{c}\;\bar{a}\;\bar{d}]\,\bar{b} + [\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{d}]\,\bar{c} - [\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}]\,\bar{d} = 0.$

இது ஏதேனும் நான்கு வெக்டர்கள் கொடுக்கப்பட்டால் அவற்றிற் கிடையே அமைந்த ஒருபடித் தொடர்பு (linear relation) எனப்படும். மேலும் நான்கு வெக்டர்களும் ஒருதள அமைவுடையன எனில்,

$[\mathbf{a}\;\mathbf{b}\;\mathbf{c}] = [\mathbf{a}\;\mathbf{b}\;\mathbf{d}] = [\mathbf{b}\;\mathbf{c}\;\mathbf{d}] = [\mathbf{a}\;\mathbf{c}\;\mathbf{d}] = 0$

$\therefore\; (\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d}) = 0$ ஆகும். இதையே நான்கு வெக்டர்கள் ஒருதள அமைவுடையனவாயிருக்கத் தேவையான நியதியாகக் கொள்ளலாம்.

குறிப்பு: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ என்பவை ஒருதள அமைப்பில்லாதவையெனில் $\bar{r}$ எனும் வேறொரு வெக்டரை $l\bar{a} + m\bar{b} + n\bar{c}$ எனும் ஒருபடிச் சேர்வாக எழுத இயலும் என்று முன்பே கண்டோம். இதில் வரும் l, m, n என்ற எண்களைக் காண மேற்கண்ட நான்கு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கலைப் பயன்படுத்தலாம். அதாவது

$(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{r}) = [\bar{a}\;\bar{c}\;\bar{r}]\,\bar{b} - [\bar{b}\;\bar{c}\;\bar{r}]\,\bar{a}$ எனவும்

$= [\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{r}]\,\bar{c} - [\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}]\,\bar{r}$ எனவும்

எழுதலாம். எனவே ஒன்றிலிருந்து மற்றதைக் கழித்தால்,

$[\bar{b}\;\bar{c}\;\bar{r}]\,\bar{a} - [\bar{a}\;\bar{c}\;\bar{r}]\,\bar{b} + [\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{r}]\,\bar{c} - [\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}]\,\bar{r} = 0.$

$$\therefore\quad \bar{r}\,[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = [\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{r}]\,\bar{a} - [\bar{c}\ \bar{r}\ \bar{a}]\,\bar{b} + [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{r}]\,\bar{c}$$

$$\therefore\quad \bar{r} = \frac{[\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{r}]\,\bar{a} - [\bar{c}\ \bar{r}\ \bar{a}]\,\bar{b} + [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{r}]\,\bar{c}}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}$$

$$= \frac{[\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{r}]\,\bar{a} + [\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{r}]\,\bar{b} + [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{r}]\,\bar{c}}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}$$

இதனை $l\bar{a} + m\bar{b} + n\bar{c}$ உடன் ஒப்பிட்டால்,

$$l = \frac{[\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{r}]}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]};\quad m = \frac{[\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{r}]}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]};\quad n = \frac{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{r}]}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}$$

எனக் கிடைக்கும்.

§ 4·11. இரண்டு அளவை முப்பெருக்கிகளின் பெருக்கல்

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c};\ \bar{p}, \bar{q}, \bar{r};$ என இரு வெக்டர் தொகுதிகளை எடுத்துக் கொள்வோம். $\bar{a}\cdot\bar{b}\times\bar{c};\ \bar{p}\cdot\bar{q}\times\bar{r}$ ஆகிய இரு அளவை முப்பெருக்கி களின் பெருக்கல் மதிப்பைக் காணவேண்டும்.

$\bar{q}\times\bar{r} = \bar{d}$ என்க.

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ என்ற நான்கு வெக்டர்களுக்கிடைப்பட்ட ஒருபடித் தொடர்பு

$$[\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{d}]\,\bar{a} + [\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{d}]\,\bar{b} + [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{d}]\,\bar{c} - [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]\,\bar{d} = 0 \quad \ldots\ldots(1)$$

ஆனால் $[\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{d}] = \bar{b}\times\bar{c}\cdot\bar{d}$

$$= (\bar{b}\times\bar{c})\cdot(\bar{q}\times\bar{r}) = \begin{vmatrix} \bar{b}\cdot\bar{q} & \bar{b}\cdot\bar{r} \\ \bar{c}\cdot\bar{q} & \bar{c}\cdot\bar{r} \end{vmatrix}$$

இதேபோல் $[\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{d}] = \bar{c}\times\bar{a}\cdot\bar{d}$

$$= \bar{c}\times\bar{a}\cdot(\bar{q}\times\bar{r})$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{c}\cdot\bar{q} & \bar{c}\cdot\bar{r} \\ \bar{a}\cdot\bar{q} & \bar{a}\cdot\bar{r} \end{vmatrix}$$

$$[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{d}] = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{d} = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{q}\times\bar{r})$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{a}\cdot\bar{q} & \bar{a}\cdot\bar{r} \\ \bar{b}\cdot\bar{q} & \bar{b}\cdot\bar{r} \end{vmatrix}$$

$$\therefore\quad [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]\,\bar{d} = [\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{d}]\,\bar{a} + [\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{d}]\,\bar{b} + [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{d}]\,\bar{c}$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{b}\cdot\bar{q} & \bar{b}\cdot\bar{r} \\ \bar{c}\cdot\bar{q} & \bar{c}\cdot\bar{r} \end{vmatrix}\bar{a} + \begin{vmatrix} \bar{c}\cdot\bar{q} & \bar{c}\cdot\bar{r} \\ \bar{a}\cdot\bar{q} & \bar{a}\cdot\bar{r} \end{vmatrix}\bar{b} + \begin{vmatrix} \bar{a}\cdot\bar{q} & \bar{a}\cdot\bar{r} \\ \bar{b}\cdot\bar{q} & \bar{b}\cdot\bar{r} \end{vmatrix}\bar{c}$$

இருபுறமும் புள்ளிப் பெருக்கல் $\bar{p}$யுடன் எடுத்தால்,

$$[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]\,\bar{p}\cdot\bar{d} = \bar{a}\cdot\bar{p}\begin{vmatrix} \bar{b}\cdot\bar{q} & \bar{b}\cdot\bar{r} \\ \bar{c}\cdot\bar{q} & \bar{c}\cdot\bar{r} \end{vmatrix} + \bar{b}\cdot\bar{p}\begin{vmatrix} \bar{c}\cdot\bar{q} & \bar{c}\cdot\bar{r} \\ \bar{a}\cdot\bar{q} & \bar{a}\cdot\bar{r} \end{vmatrix}$$

$$+ \bar{c}\cdot\bar{p}\begin{vmatrix} \bar{a}\cdot\bar{q} & \bar{a}\cdot\bar{r} \\ \bar{b}\cdot\bar{q} & \bar{b}\cdot\bar{r} \end{vmatrix}$$

$$= \bar{a}\cdot\bar{p}\begin{vmatrix}\bar{b}\cdot\bar{q} & \bar{b}\cdot\bar{r}\\ \bar{c}\cdot\bar{q} & \bar{c}\cdot\bar{r}\end{vmatrix} - \bar{b}\cdot\bar{p}\begin{vmatrix}\bar{a}\cdot\bar{q} & \bar{a}\cdot\bar{r}\\ \bar{c}\cdot\bar{q} & \bar{c}\cdot\bar{r}\end{vmatrix} + \bar{c}\cdot\bar{p}\begin{vmatrix}\bar{a}\cdot\bar{q} & \bar{a}\cdot\bar{r}\\ \bar{b}\cdot\bar{q} & \bar{b}\cdot\bar{r}\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}\bar{a}\cdot\bar{p} & \bar{b}\cdot\bar{p} & \bar{c}\cdot\bar{p}\\ \bar{a}\cdot\bar{q} & \bar{b}\cdot\bar{q} & \bar{c}\cdot\bar{q}\\ \bar{a}\cdot\bar{r} & \bar{b}\cdot\bar{r} & \bar{c}\cdot\bar{r}\end{vmatrix}$$

வழி முடிவு: மேற்கண்ட பெருக்கலில் $\bar{p} = \bar{a}$; $\bar{q} = \bar{b}$; $\bar{r} = \bar{c}$

எனில் $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]\,[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]^2 = \begin{vmatrix}\bar{a}\cdot\bar{a} & \bar{b}\cdot\bar{a} & \bar{c}\cdot\bar{a}\\ \bar{a}\cdot\bar{b} & \bar{b}\cdot\bar{b} & \bar{c}\cdot\bar{b}\\ \bar{a}\cdot\bar{c} & \bar{b}\cdot\bar{c} & \bar{c}\cdot\bar{c}\end{vmatrix}$

மாற்று வழி: $\bar{a} = a_1i + a_2j + a_3k$;
$\bar{b} = b_1i + b_2j + b_3k$;
$\bar{c} = c_1i + c_2j + c_3k$; எனவும்,
$\bar{p} = p_1i + p_2j + p_3k$;
$\bar{q} = q_1i + q_2j + q_3k$;
$\bar{r} = r_1i + r_2j + r_3k$ எனவும் கொள்க.

$$\therefore\ [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

$$[\bar{p}\ \bar{q}\ \bar{r}] = \begin{vmatrix}p_1 & p_2 & p_3\\ q_1 & q_2 & q_3\\ r_1 & r_2 & r_3\end{vmatrix}$$

இரு அணிக் கோவைகளின் பெருக்கல் விதிப்படி

$$[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]\,[\bar{p}\ \bar{q}\ \bar{r}] = \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix}p_1 & p_2 & p_3\\ q_1 & q_2 & q_3\\ r_1 & r_2 & r_3\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3, & a_1q_1+a_2q_2+a_3q_3, & a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3\\ b_1p_1+b_2p_2+b_3p_3, & b_1q_1+b_2q_2+b_3q_3, & b_1r_1+b_2r_2+b_3r_3\\ c_1p_1+c_2p_2+c_3p_3, & c_1q_1+c_2q_2+c_3q_3, & c_1r_1+c_2r_2+c_3r_3\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}\bar{a}\cdot\bar{p} & \bar{a}\cdot\bar{q} & \bar{a}\cdot\bar{r}\\ \bar{b}\cdot\bar{p} & \bar{b}\cdot\bar{q} & \bar{b}\cdot\bar{r}\\ \bar{c}\cdot\bar{p} & \bar{c}\cdot\bar{q} & \bar{c}\cdot\bar{r}\end{vmatrix}$$

§ 4·12. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ **என்பன ஒருதள அமைப்பில்லாதன எனில்**

$$[\bar{a}\times\bar{b},\ \bar{b}\times\bar{c},\ \bar{c}\times\bar{a}] = [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]^2$$

$\bar{a} = a_1i + a_2j + a_3k$;
$\bar{b} = b_1i + b_2j + b_3k$;
$\bar{c} = c_1i + c_2j + c_3k$; என்க.

$$\therefore\ \overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix};\ \overline{b}\times\overline{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\overline{c}\times\overline{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ என்ற அணிக்கோவையின் விரிவில்

a_1, a_2,... முதலிய மூலக உறுப்புகளைப் பெருக்கும் காரணிகளாய் விளங்கும், ஒருபடி குறைந்த அணிக்கோவைகளை A_1, A_2,... என்ற பெரிய எழுத்துக்களால் குறித்தால் (அதாவது A_1, A_2... என்பன இணைச்சினைகள் (cofactors)

$$\overline{a}\times\overline{b} = C_1i + C_2j + C_3k;$$
$$\overline{b}\times\overline{c} = A_1i + A_2j + A_3k;$$
$$\overline{c}\times\overline{a} = B_1i + B_2j + B_3k;$$

$$\therefore\ [\overline{a}\times\overline{b}, \overline{b}\times\overline{c}, \overline{c}\times\overline{a}] = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2$$ (அணிக்கோவை விதியின்படி)

$$= [\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}]^2.$$

எடுத்துக்காட்டு 1: $\overline{a} = 2i-3j+5k$; $\overline{b} = 3i-4j+5k$; $\overline{c} = 5i-3j-2k$ என்ற வெக்டர்களை ஒரு முனையிற்கூடும் விளிம்புகளாய்.உடைய இணைவகத் திண்மத்தின் கன அளவு காண்க.

இணைவகத் திண்மத்தின் கன அளவு $= \overline{a}\cdot\overline{b}\times\overline{c}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(8+15) + 3(-6-25) + 5(-9+20)$$
$$= 46 - 93 + 55$$
$$= 8$$

எடுத்துக்காட்டு 2 : $\overline{a} = 2i - j + k$; $\overline{b} = i + lj - 3k$; $\overline{c} = 3i - 4j + 5k$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரு தள அமைவுடையன வெனில் l-ன் மதிப்பு என்ன ?

$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ ஒரே தள அமைவுடையன எனில்,

$$\overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c} = 0; \quad \text{i.e. } [\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}] = 0.$$

$$\text{i.e.} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & l & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

i.e. $2(5l-12) + 1(5+9) + 1(-4-3l) = 0.$

i.e. $7l - 14 = 0; \quad \therefore \ l = 2.$

எடுத்துக்காட்டு 3 : $\overline{a} = 3i + 2j - 4k$, $\overline{b} = 5i - 3j + 6k$; $\overline{c} = 5i - j + 2k$ எனில், (i) $(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c}$ (ii) $(\overline{b}\times\overline{c})\cdot\overline{a}$ ஆகிய வற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

$$\overline{a} = 3i + 2j - 4k;$$
$$\overline{b} = 5i - 3j + 6k;$$

$$\therefore \ \overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -38j - 19k.$$

$$\therefore \ (\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -38 & -19 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= i[-76-19] + j[-95-0] + k[0+190]$$
$$= -95i - 95j + 190k.$$
$$= -95[i + j - 2k).$$

$$\text{மேலும் } (\overline{b}+\overline{c})\cdot\overline{a} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & -3 & 6 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-6+6) + 2(30-10) + (-4)(-5+15)$$
$$= 40 - 40$$
$$= 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 4 : $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})+\bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{a})+\bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b})=0$ எனக் காண்பி. (BSc ஏப். 69)

வாய்பாட்டின்படி

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = (\bar{a}\cdot\bar{c})\,\bar{b} - (\bar{a}\cdot\bar{b})\,\bar{c}$$
$$\bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{a}) = (\bar{b}\cdot\bar{a})\,\bar{c} - (\bar{b}\cdot\bar{c})\,\bar{a}$$
$$\bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b}) = (\bar{c}\cdot\bar{b})\,\bar{a} - (\bar{c}\cdot\bar{a})\,\bar{b}$$

மூன்றையும் கூட்டினால்,

$$\Sigma\,\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 5 : $[\bar{a}+\bar{b},\ \bar{b}+\bar{c};\ \bar{c}+\bar{a}] = 2[\bar{a},\bar{b},\bar{c}]$.

வரையறைப்படி $[\bar{a}+\bar{b},\ \bar{b}+\bar{c},\ \bar{c}+\bar{a}]$

$$= (\bar{a}+\bar{b})\cdot\{(\bar{b}+\bar{c})\times(\bar{c}+\bar{a})\}$$
$$= (\bar{a}+\bar{b})\cdot\{\bar{b}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{a}+\bar{c}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}\}$$
$$= (\bar{a}+\bar{b})\cdot\{\bar{b}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{a}+\bar{c}\times\bar{a}\}$$
$$= \bar{a}\cdot\bar{b}\times\bar{c}+\bar{a}\cdot\bar{b}\times\bar{a}+\bar{a}\cdot\bar{c}\times\bar{a}+\bar{b}\cdot\bar{b}\times\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{b}\times\bar{a} + \bar{b}\cdot\bar{c}\times\bar{a}$$
$$= [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]+0+0+0+0+[\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{a}]$$
$$= 2[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$$

எடுத்துக்காட்டு 6 : $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ என்பவை ஏதோ நான்கு வெக்டர்கள் எனில், $(\bar{b}\times\bar{c})\cdot(\bar{a}\times\bar{d})+(\bar{c}\times\bar{a})\cdot(\bar{b}\times\bar{d})+(\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{c}\times\bar{d})=0$ என நிறுவுக. அதனின்றும்

$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

$\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$ எனவும் நிறுவுக.

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{c}\times\bar{d}) = \begin{vmatrix}\bar{a}\cdot\bar{c} & \bar{a}\cdot\bar{d}\\ \bar{b}\cdot\bar{c} & \bar{b}\cdot\bar{d}\end{vmatrix}$$
$$= (\bar{a}\cdot\bar{c})(\bar{b}\cdot\bar{d}) - (\bar{a}\cdot\bar{d})(\bar{b}\cdot\bar{c}) \quad \text{... (1)}$$

$$(\bar{b}\times\bar{c})\cdot(\bar{a}\times\bar{d}) = \begin{vmatrix}\bar{b}\cdot\bar{a} & \bar{b}\cdot\bar{d}\\ \bar{c}\cdot\bar{a} & \bar{c}\cdot\bar{d}\end{vmatrix}$$
$$= (\bar{a}\cdot\bar{b})(\bar{c}\cdot\bar{d}) - (\bar{b}\cdot\bar{d})(\bar{a}\cdot\bar{c}) \quad \text{... (2)}$$

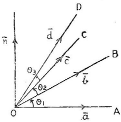
$$(\bar{c}\times\bar{a})\cdot(\bar{b}\times\bar{d}) = \begin{vmatrix}\bar{c}\cdot\bar{b} & \bar{c}\cdot\bar{d}\\ \bar{a}\cdot\bar{b} & \bar{a}\cdot\bar{d}\end{vmatrix}$$
$$= (\bar{b}\cdot\bar{c})(\bar{a}\cdot\bar{d}) - (\bar{a}\cdot\bar{b})(\bar{c}\cdot\bar{d}) \quad \text{... (3)}$$

(1), (2), (3) ஆகிய சமன்பாடுகளைக் கூட்ட,

$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{c}\times\bar{d})+(\bar{b}\times\bar{c})\cdot(\bar{a}\times\bar{d})+(\bar{c}\times\bar{a})\cdot(\bar{b}\times\bar{d})$
$= 0$ என்றாகிறது.

$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ என்பவை, முறையே A, B, C, Dயின் நிலைவெக்டர்கள் எனவும், A, B, C, D ஒரே தளத்தில் உள்ளன எனவும்,

$\angle AOB = \theta_1$, $\angle BOC = \theta_2$, $\angle COD = \theta_3$ எனவும், $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ யின் தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர் $\hat{n}$ எனவும் கொள்க.



படம் 65.

$$\therefore \quad \overline{a}\times\overline{b} = |\overline{a}|\,|\overline{b}| \sin\theta_1\,\hat{n} = ab\sin\theta_1\,\hat{n} \text{ என்க.}$$

$$\overline{b}\times\overline{c} = bc\sin\theta_2\,\hat{n}$$

$$\overline{c}\times\overline{d} = cd\sin\theta_3\,\hat{n};$$

$$\overline{a}\times\overline{d} = ad\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\,\hat{n}.$$

$$\overline{b}\times\overline{d} = bd\sin(\theta_2+\theta_3)\,\hat{n}$$

$$\therefore \quad (\overline{b}\times\overline{c})\cdot(\overline{a}\times\overline{d}) = \{bc\sin\theta_2 \cdot ad\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\}\,\hat{n}\cdot\hat{n}$$
$$= abcd\sin\theta_2\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) \quad \cdots (1)$$

இதேபோன்று

$$(\overline{c}\times\overline{a})\cdot(\overline{b}\times\overline{d}) = -abcd\sin(\theta_1+\theta_2)\sin(\theta_2+\theta_3) \quad \cdots (2)$$

$\{$ஏனெனில் $\overline{c}\times\overline{a} = -\overline{a}\times\overline{c} = -ac\sin(\theta_1+\theta_2)\,\hat{n}\}$

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot(\overline{c}\times\overline{d}) = abcd\sin\theta_1\sin\theta_3 \quad \cdots (3)$$

முதலில் நிறுவப்பட்ட முடிவின்படி, $(1)+(2)+(3) = 0$

i.e. $abcd\,\{\sin\theta_2\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) - \sin(\theta_1+\theta_2)\sin(\theta_2+\theta_3) + \sin\theta_1\sin\theta_3\} = 0$

i.e. $\sin\theta_2\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) - \sin(\theta_1+\theta_2)\sin(\theta_2+\theta_3) + \sin\theta_1\sin\theta_3 = 0$

இதில் $\theta_1 = B$, $\theta_2 = A$; $\theta_3 = -B$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$\sin A \cdot \sin A - \sin(B+A)\sin(A-B) + \sin B\sin(-B) = 0$

i.e. $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$.

மேலும் $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot(\overline{c}\times\overline{d}) = (\overline{a}\cdot\overline{c})(\overline{b}\cdot\overline{d}) - (\overline{a}\cdot\overline{d})(\overline{b}\cdot\overline{c})$

i.e. $ab\sin\theta_1 \cdot cd\sin\theta_3 = ac\cos(\theta_1+\theta_2)\,bd\cos(\theta_2+\theta_3) - ad\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\cdot bc\cos\theta_2$

i.e. $\sin\theta_1 \sin\theta_3 = \cos(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_2+\theta_3) - \cos\theta_2 \cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$

இதில் $\theta_1 = B$, $\theta_2 = A$; $\theta_3 = -B$ எனப் பிரதியிட்டால்,

$\sin B \cdot \sin(-B) = \cos(B+A) \cdot \cos(A-B) - \cos A \cos A$.

i.e. $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$.

எடுத்துக்காட்டு 7: $\vec{a}$யும் $\vec{c}$யும் ஒரே கோட்டில் அமைவன எனில் $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ எனக் காண்பி.

[B.Sc. து. பா. ஏப். 64]

வாய்பாட்டின்படி $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\,\vec{a}$

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$

இவ்விரண்டு மதிப்புகளும் சமம் எனில்

$(\vec{b}\cdot\vec{c})\,\vec{a} = (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$ என இருக்கவேண்டும்.

அதாவது $\vec{c} = \left(\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\vec{a}\cdot\vec{b}}\right)\vec{a}$ என இருக்கவேண்டும்.

அதாவது $\vec{c}$, $\vec{a}$யினைப்போல் ஒரு எண் மடங்கு (scalar multiple.)

$\therefore$ $\vec{c}$யும் $\vec{a}$யும் ஒரு கோட்டமைவு உடையன [மறுதலையாக $\vec{a}$யும் $\vec{c}$யும் ஒரு கோட்டமைவு உடையன] எனில் $\vec{a} = m\vec{c}$ எனும்படி 'm' எனும் திசையிலி எண் காண இயலும்.

$$\therefore\ \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = m\vec{c}\times(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} &= (m\vec{c}\times\vec{b})\times\vec{c}\\ &= -\vec{c}\times(m\vec{c}\times\vec{b})\\ &= -m\vec{c}\times(\vec{c}\times\vec{b})\\ &= -m\vec{c}\times(-\vec{b}\times\vec{c})\\ &= m\vec{c}\times(\vec{b}\times\vec{c})\\ &= \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\end{aligned}$$

எனவே $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ என்றிருக்க $\vec{a}$யும் $\vec{c}$யும் ஒரே நேர் கோட்டில் அமைவனவாயிருக்க வேண்டும் என்பதும், அவ்வாறிருந்தால் $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ என்பது உண்மை யென்பது நிறுவப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்பன ஒரே தள அமைவில்லாதன எனில் $\vec{b}\times\vec{c}$, $\vec{c}\times\vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ என்பனவும் ஒரே தள அமைவில்லாதன எனக் காண்பி.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்பன ஒரேதள அமைவில்லாதன எனில்

$$[\,\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\,] \neq 0$$

மேலும் $[\bar{b}\times\bar{c}, \bar{c}\times\bar{a}, \bar{a}\times\bar{b}] = [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]^2$

எனவே இதுவும் 0 அல்ல.

எனவே $\bar{b}\times\bar{c}$, $\bar{c}\times\bar{a}$, $\bar{a}\times\bar{b}$ என்பவையும் ஒரே தள அமைவில்லாதனவாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9: l, m, n, என்பன ஒரேதள அமைவில்லாத வெக்டர்கள் எனில் λ, μ என்ற ஏதோ இரு வெக்டர்களுக்கு

$$[\bar{l}\ \bar{m}\ \bar{n}]\,(\lambda\times\mu) = \begin{vmatrix} \bar{l}\cdot\bar{\lambda} & \bar{l}\cdot\bar{\mu} & \bar{l} \\ \bar{m}\cdot\bar{\lambda} & \bar{m}\cdot\bar{\mu} & \bar{m} \\ \bar{n}\cdot\bar{\lambda} & \bar{n}\cdot\bar{\mu} & \bar{n} \end{vmatrix}$$ எனக் காண்பி.

$$\bar{l} = l_1 i + l_2 j + l_3 k\ ;\ m = m_1 i + m_2 j + m_3 k\ ;$$
$$\bar{n} = n_1 i + n_2 j + n_3 k$$
$$\bar{\lambda} = \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$$
$$\mu = \mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k$$ என்க.

$$\therefore\quad [\bar{l}\ \bar{m}\ \bar{n}] = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}$$

$$\bar{\lambda}\times\bar{\mu} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ [lmn]\,(\bar{\lambda}\times\bar{\mu}) = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} l_1 i + l_2 j + l_3 k, & l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2 + l_3\lambda_3, & l_1\mu_1 + l_2\mu_2 + l_3\mu_3 \\ m_1 i + m_2 j + m_3 k, & m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + m_3\lambda_3, & m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + m_3\mu_3 \\ n_1 i + n_2 j + n_3 k, & n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + n_3\lambda_3, & n_1\mu_1 + n_2\mu_2 + n_3\mu_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{l} & \bar{l}\cdot\bar{\lambda} & \bar{l}\cdot\bar{\mu} \\ \bar{m} & \bar{m}\cdot\bar{\lambda} & \bar{m}\cdot\bar{\mu} \\ \bar{n} & \bar{n}\cdot\bar{\lambda} & \bar{n}\cdot\bar{\mu} \end{vmatrix}$$

இரண்டு முறை நிரல் மாற்றம் (interchange of columns) செய்தால் இம்மதிப்பு

$$= \begin{vmatrix} \bar{l}\cdot\bar{\lambda} & \bar{l}\cdot\bar{\mu} & \bar{l} \\ \bar{m}\cdot\bar{\lambda} & \bar{m}\cdot\bar{\mu} & \bar{m} \\ \bar{n}\cdot\bar{\lambda} & \bar{n}\cdot\bar{\mu} & \bar{n} \end{vmatrix}$$ என்றாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10 : $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்பன முறையே A, B, C எனும் புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் எனில் $\overline{a}\times\overline{b}+\overline{b}\times\overline{c}+\overline{c}\times\overline{a}$ என்ற வெக்டர் ABCயின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகும் எனக் காண்பி.

A, B, Cயின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

$\therefore\ \overline{AB} = \overline{b}-\overline{a},\ \ \overline{AC} = \overline{c}-\overline{a}$.

$\overline{AB}\times\overline{AC}$ என்ற வெக்டர் ABCயின் தளத்திற்குச் செங்குத்து ஆகும்.

i.e. $(\overline{b}-\overline{a})\times(\overline{c}-\overline{a})$

$= \overline{b}\times\overline{c}-\overline{b}\times\overline{a}-\overline{a}\times\overline{c}+\overline{a}\times\overline{a}$

$= \overline{b}\times\overline{c}+\overline{a}\times\overline{b}+\overline{c}\times\overline{a}$ எனும் வெக்டர் ABCயின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 11: $4i+5j+k$, $-j-k$, $3i+9j+4k$, $-4i+4j+4k$ எனும் நிலைவெக்டர்களுடைய புள்ளிகள் ஒரு தளத்தில் அமையும் என நிறுவுக.

A யின் நிலைவெக்டர் $= 4i+5j+k$,

B யின் நிலைவெக்டர் $= -j-k$,

C யின் நிலைவெக்டர் $= 3i+9j+4k$,

D யின் நிலைவெக்டர் $= -4i+4j+4k$,

$\therefore\ \overline{AB} = -4i-6j-2k$,

$\overline{BC} = 3i+10j+5k$,

$\overline{CD} = -7i-5j$.

$$\therefore\ \overline{AB}\cdot\overline{BC}\times\overline{CD} = \begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ 3 & 10 & 5 \\ -7 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2\,(-15+70)-5\,(20-42)$$

$$= -110+110$$

$$= 0$$

எனவே $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ஒருதள அமைவுடையன.

அதாவது நான்கு புள்ளிகளும் ஒரு சமதளத்தில் அமைகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 12 : $\overline{a}$, $\overline{b}$ என்ற இரு வெக்டர்கள் $\overline{c}$, $\overline{d}$ என்ற இரு வெக்டர்களின் தளத்திற்குச் செங்குத்தான தளத்தில் அமைந்தால் $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot(\overline{c}\times\overline{d}) = 0$ எனக் காண்பி.

வாய்பாட்டின்படி

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot(\overline{c}\times\overline{d}) = \begin{vmatrix} \overline{a}\cdot\overline{c} & \overline{a}\cdot\overline{d} \\ \overline{b}\cdot\overline{c} & \overline{b}\cdot\overline{d} \end{vmatrix}$$

ஆனால் $\overline{c}$, $\overline{d}$யின் தளத்திற்கு $\overline{a}$யும், $\overline{b}$யும் செங்குத்தாகையால் $\overline{a}\cdot\overline{c}, \overline{a}\cdot\overline{d}, \overline{b}\cdot\overline{c}, \overline{b}\cdot\overline{d}$ ஆகியவை பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \text{ அணிக் கோவை } \begin{vmatrix} \overline{a}\cdot\overline{c} & \overline{a}\cdot\overline{d} \\ \overline{b}\cdot\overline{c} & \overline{b}\cdot\overline{d} \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{i.e. } (\overline{a}\times\overline{b})\cdot(\overline{c}\times\overline{d}) = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 13 : $\overline{a}=a_1i+a_2j+a_3k$; $\overline{b}=b_1i+b_2j+b_3k$; $\overline{c}=c_1i+c_2j+c_3k$; $\overline{d}=d_1i+d_2j+d_3k$;

எனில்
$$\begin{vmatrix} -\overline{a} & -\overline{b} & \overline{c} & \overline{d} \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 2(\overline{a}\times\overline{b})\times(\overline{c}\times\overline{d})$$
எனக் காண்பி.

வாய்பாட்டின்படி $(\overline{a}\times\overline{b})\times(\overline{c}\times\overline{d})=[\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{d}]\overline{c}-[\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}]\overline{d}$

அல்லது $=[\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{d}]\overline{b}-[\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d}]\overline{a}$

$$\therefore 2(\overline{a}\times\overline{b})\times(\overline{c}\times\overline{d}) = -[\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d}]\overline{a}+[\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{d}]\overline{b}+[\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{d}]\overline{c}-[\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}]\overline{d}$$

ஆனால் $[\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d}] = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$

$$[\overline{a}\,\overline{c}\,\overline{d}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$[\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{d}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$[\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore 2(\overline{a}\times\overline{b})\times(\overline{c}\times\overline{d})$$

$$= -\overline{a}\begin{vmatrix} b_1c_1d_1 \\ b_2c_2d_2 \\ b_3c_3d_3 \end{vmatrix} + \overline{b}\begin{vmatrix} a_1c_1d_1 \\ a_2c_2d_2 \\ a_3c_3d_3 \end{vmatrix} + \overline{c}\begin{vmatrix} a_1b_1d_1 \\ a_2b_2d_2 \\ a_3b_3d_3 \end{vmatrix} - \overline{d}\begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\overline{a} & -\overline{b} & \overline{c} & \overline{d} \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 14 : $OABC$ என்ற நான்முகியில் $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ எனவும் $A\hat{O}B=\varphi$, $B\hat{O}C=\theta$, $C\hat{O}A=\Psi$ எனவும் இருந்தால் அதன் கன அளவு

$$V=\frac{abc}{6}\begin{vmatrix}1 & \cos\varphi & \cos\Psi\\ \cos\varphi & 1 & \cos\theta\\ \cos\Psi & \cos\theta & 1\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

என நிறுவுக.

Oவினை ஆதியாய்க் கொண்டு A, B, Cயின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்க. $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ எனவும், $A\hat{O}B=\varphi$, $B\hat{O}C=\theta$, $C\hat{O}A=\Psi$ எனவும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

நான்முகியின் கன அளவு

$$V=\tfrac{1}{6}(\overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c})$$

$$=\tfrac{1}{6}[\overline{a}\;\overline{b}\;\overline{c}]$$

$$\therefore\; V^2=\tfrac{1}{36}[\overline{a}\;\overline{b}\;\overline{c}]^2$$

$$=\tfrac{1}{36}\begin{vmatrix}\overline{a}\cdot\overline{a} & \overline{a}\cdot\overline{b} & \overline{a}\cdot\overline{c}\\ \overline{b}\cdot\overline{a} & \overline{b}\cdot\overline{b} & \overline{b}\cdot\overline{c}\\ \overline{c}\cdot\overline{a} & \overline{c}\cdot\overline{b} & \overline{c}\cdot\overline{c}\end{vmatrix}$$

$$=\tfrac{1}{36}\begin{vmatrix}a^2 & ab\cos\varphi & ac\cos\Psi\\ ab\cos\varphi & b^2 & bc\cos\theta\\ ac\cos\Psi & bc\cos\theta & c^2\end{vmatrix}$$

c_1லிருந்து aயும் c_2லிருந்து bயும் c_3யிலிருந்து cயும் எடுத்தால்

$$=\frac{abc}{36}\begin{vmatrix}a & a\cos\varphi & a\cos\Psi\\ b\cos\varphi & b & b\cos\theta\\ c\cos\Psi & c\cos\theta & c\end{vmatrix}$$

r_1ல் இருந்து aயும் r_2...... bயும் r_3......cயும் எடுத்தால்,

$$=\frac{a^2b^2c^2}{36}\begin{vmatrix}1 & \cos\varphi & \cos\Psi\\ \cos\varphi & 1 & \cos\theta\\ \cos\Psi & \cos\theta & 1\end{vmatrix}$$

$$\therefore\; V=\frac{abc}{6}\begin{vmatrix}1 & \cos\varphi & \cos\Psi\\ \cos\varphi & 1 & \cos\theta\\ \cos\Psi & \cos\theta & 1\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

எடுத்துக்காட்டு 15 : $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ என்ற நிலைவெக்டர்களுடைய புள்ளிகளால் உருவாக்கப்பெறும் தளத்திற்கு $\overline{a}$ என்ற நிலைவெக்டருடைய புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துத் தூரம்

$$\frac{[\overline{b}\;\overline{c}\;\overline{d}]+[\overline{c}\;\overline{a}\;\overline{d}]+[\overline{a}\;\overline{b}\;\overline{d}]-[\overline{a}\;\overline{b}\;\overline{c}]}{|\overline{b}\times\overline{c}+\overline{c}\times\overline{d}+\overline{d}\times\overline{b}|}$$ எனக்காட்டு.

$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ என்பன முறையே A, B, C, D எனும் புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் என்க. BCD என்ற தளத்திற்கு Aயிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக்கோட்டின் நீளம் p என்க.

$\therefore$ $\frac{1}{3}$ பரப்பு $BCD \times p$ = நான்முகி $ABCD$யின் கன அளவு = V என்க.

அதாவது $V = \frac{1}{6}\{\overline{AB} \times \overline{AC} \cdot \overline{AD}\}$.

$= \frac{1}{6}\{(\overline{b}-\overline{a}) \times (\overline{c}-\overline{a}) \cdot (\overline{d}-\overline{a})\}$.

$= \frac{1}{6}\{\overline{b}\times\overline{c} - \overline{b}\times\overline{a} - \overline{a}\times\overline{c}\} \cdot (\overline{d}-\overline{a})$

$= \frac{1}{6}\{\overline{b}\times\overline{c}\cdot\overline{d} - \overline{b}\times\overline{c}\cdot\overline{a} - \overline{b}\times\overline{a}\cdot\overline{d} - \overline{a}\times\overline{c}\cdot\overline{d}\}$

$= \frac{1}{6}\{\overline{b}\times\overline{c}\cdot\overline{d} - \overline{b}\times\overline{c}\cdot\overline{a} + \overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{d} + \overline{c}\times\overline{a}\cdot\overline{d}\}$

$= \frac{1}{6}\{[\overline{b}\ \overline{c}\ \overline{d}] - [\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}] + [\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{d}] + [\overline{c}\ \overline{a}\ \overline{d}]\}$

$= \frac{1}{6}\{[\overline{b}\ \overline{c}\ \overline{d}] + [\overline{c}\ \overline{a}\ \overline{d}] + [\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{d}] - [\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}]\}$

ஆனால் பரப்பு $BCD = |\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{BD}|$

$= \frac{1}{2}|(\overline{c}-\overline{b})\times(\overline{d}-\overline{b})|$

$= \frac{1}{2}|\overline{c}\times\overline{d} - \overline{c}\times\overline{b} - \overline{b}\times\overline{d}|$

$= \frac{1}{2}|\overline{c}\times\overline{d} + \overline{b}\times\overline{c} + \overline{d}\times\overline{b}|$

$= \frac{1}{2}|\overline{b}\times\overline{c} + \overline{c}\times\overline{d} + \overline{d}\times\overline{b}|$

$$\therefore p = \frac{\frac{1}{6}\{[\overline{b}\ \overline{c}\ \overline{d}] + [\overline{c}\ \overline{a}\ \overline{d}] + [\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{d}] - [\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}]\}}{\frac{1}{6}\{|\overline{b}\times\overline{c} + \overline{c}\times\overline{d} + \overline{d}\times\overline{b}|\}}$$

$$= \frac{[\overline{b}\ \overline{c}\ \overline{d}] + [\overline{c}\ \overline{a}\ \overline{d}] + [\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{d}] - [\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}]}{|\overline{b}\times\overline{c} + \overline{c}\times\overline{d} + \overline{d}\times\overline{b}|}$$

எடுத்துக்காட்டு 16 : ஒரு நான்முகியின் நான்கு பக்கங்களும் சராசரி மையத்தில் சமமான கன அளவுகளைத் தாங்கும் என நிறுவுக.

$ABCD$ என்ற நான் முகியின் சராசரி மையம் G என்க. Gயை ஆதியாய்க்கொண்டு A, B, C, Dயின் நிலை வெக்டர்கள் $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ என்க.

எனவே சராசரி மையத்தின் நிலைவெக்டர் $\dfrac{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}}{4} = 0$

i.e. $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d} = 0$ .....(1)

$GABC$ எனும் நான்முகியின் கன அளவு

$= \frac{1}{6}\{\overline{GA}\times\overline{GB}\cdot\overline{GC}\}$

$= \frac{1}{6}\{\overline{a}\times\overline{b}\cdot\overline{c}\}$

$GBCD$ எனும் நான்முகியின் கன அளவு

$$= \frac{1}{6}\{\overline{GB} \times \overline{GC} \cdot \overline{GD}\}$$
$$= \frac{1}{6}\{\overline{b} \times \overline{c} \cdot \overline{d}\}$$
$$= \frac{1}{6}\{\overline{b} \times \overline{c} \cdot (-\overline{a}-\overline{b}-\overline{c})\} \text{ (1)ல் இருந்து}$$
$$= \frac{1}{6}\{-\overline{b} \times \overline{c} \cdot \overline{a}\} \quad (\because \overline{b} \times \overline{c} \cdot \overline{b} = \overline{b} \times \overline{c} \cdot \overline{c} = 0)$$
$$= -\frac{1}{6}\{\overline{a} \cdot \overline{b} \times \overline{c}\}$$
$$= -\frac{1}{6}\{\overline{a} \times \overline{b} \cdot \overline{c}\}$$

எனவே $GABC$யின் கன அளவும், $GBCD$யின் கன அளவும் அளவைப் பொறுத்த மட்டிலும் சமமாகும்.

இதேபோன்று $GACD$, $GABD$ என்ற கன அளவுகளும் $\frac{1}{6}\{\overline{a} \times \overline{b} \cdot \overline{c}\}$ என நிறுவலாம்.

எனவே நான்கு பக்கங்களும் சராசரி மையத்தில் சமமான கன அளவுகளைத் தாங்குகின்றன என்பது நிறுவப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 17 : (a, o, o) (o, b, o) (o, o, c) எனும் புள்ளிகளால் உருவாகும் முக்கோணத்தினை அடிப்பக்கமாகவும் (x, y, z) என்ற புள்ளியை உச்சிப் புள்ளியாகவும் கொண்ட நான்முகியின் கன அளவு $\frac{1}{6}abc\left\{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right\}$ எனக் காண்பி.

A, B, C, D என்ற புள்ளிகள் முறையே (a, o, o) (o, b, o) (o, o, c), (x, y, z) எனக் கொள்க. ஆய ஆதியையே வெக்டர் ஆதியாகவும் கொண்டால், இவற்றின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $ai, bj, ck, xi+yj+zk$ என அமையும்.

$$\therefore \overline{AB} = bj - ai;$$
$$\overline{AC} = ck - ai;$$
$$\overline{AD} = (x-a)\,i + yj + zk)$$

$\therefore$ $ABCD$ என்ற நான்முகியின் கன அளவு

$$= \frac{1}{6}\{\overline{AB} \times \overline{AC} \cdot \overline{AD}\}$$
$$= \frac{1}{6}\{(bj-ai) \times (ck-ai)\} \cdot \{(x-a)\,i + yj + zk\}$$
$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -a & b & o \\ -a & o & c \\ x-a & y & z \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{6}\{(x-a)(bc-o) - y(-ac-o) + z(o+ab)\}$$
$$= \frac{1}{6}\{(x-a)\,bc + yac + zab\}$$
$$= \frac{abc}{6}\left\{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right\}.$$

எடுத்துக்காட்டு 18: $\overline{a} \times \{ \overline{b} \times (\overline{c} \times \overline{d}) \} = (\overline{b} \cdot \overline{d})(\overline{a} \times \overline{c}) - (\overline{b} \cdot \overline{c})(\overline{a} \times \overline{d})$ என நிறுவுக. அதனின்றும் $\overline{a} \times \{\overline{b} \times [\overline{c} \times (\overline{d} \times \overline{e})]\}$ன் விரிவைக் காண்க.

$$\begin{aligned}
&\overline{a} \times \{\overline{b} \times (\overline{c} \times \overline{d})\} \\
&\quad = \overline{a} \times \{(\overline{b} \cdot \overline{d})\overline{c} - (\overline{b} \cdot \overline{c})\overline{d}\} \\
&\quad = (\overline{b} \cdot \overline{d})(\overline{a} \times \overline{c}) - (\overline{b} \cdot \overline{c})(\overline{a} \times \overline{d}) \\
&\quad \therefore \overline{a} \times \{b \times [c \times (\overline{d} \times \overline{e})]\} \\
&\quad = \overline{a} \times \{(\overline{c} \cdot \overline{e})(\overline{b} \times \overline{d}) - (\overline{c} \cdot \overline{d})(\overline{b} \times \overline{e})\} \\
&\quad = (\overline{c} \cdot \overline{e})\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{d}) - (\overline{c} \cdot \overline{d})\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{e}) \\
&\quad = (\overline{c} \cdot \overline{e})\{(\overline{a} \cdot \overline{d})\overline{b} - (\overline{a} \cdot \overline{b})\overline{d}\} - \overline{c} \cdot \overline{d}\{(\overline{a} \cdot \overline{e})\overline{b} - (\overline{a} \cdot \overline{b})\overline{e}\} \\
&\quad = (\overline{c} \cdot \overline{e})(\overline{a} \cdot \overline{d})\overline{b} - (\overline{c} \cdot \overline{e})(\overline{a} \cdot \overline{b})\overline{d} - (\overline{c} \cdot \overline{d})(\overline{a} \cdot \overline{e})\overline{b} \\
&\qquad\qquad + (\overline{c} \cdot \overline{d})(\overline{a} \cdot \overline{b})\overline{e} \\
&\quad = \{(\overline{c} \cdot \overline{e})(\overline{a} \cdot \overline{d}) - (\overline{c} \cdot \overline{d})(\overline{a} \cdot \overline{e})\}\overline{b} - (\overline{a} \cdot \overline{b})(\overline{c} \cdot \overline{e})\overline{d} \\
&\qquad\qquad + (\overline{c} \cdot \overline{d})(\overline{a} \cdot \overline{b})\overline{e} \\
&\quad = \begin{vmatrix} \overline{a} \cdot \overline{d} & \overline{a} \cdot \overline{e} \\ \overline{c} \cdot \overline{d} & \overline{c} \cdot \overline{e} \end{vmatrix} \overline{b} - (\overline{a} \cdot \overline{b})(\overline{c} \cdot \overline{e}) + (\overline{c} \cdot \overline{d})(\overline{a} \cdot \overline{b})\overline{e}.
\end{aligned}$$

பயிற்சி 4

1. (i) $\overline{a} = 3i + 2j - 5k$; $\overline{b} = -i + 3j + 4k$; $\overline{c} = 5i + j - k$;
   (ii) $2i - 3j + k$; $i - j + 2k$; $2i + j - k$;
   (isi) $3i + 4j - 5k$; $2i - k$; $i + k$;
   (iv) $4i - 7j + 5k$; $5i - 4j + 11k$; $3i + 3j - 7k$;

என்ற விளிம்புகளையுடைய இணைவகத் திண்மங்களின் கன அளவுகளைக் காண்க.

2. $\overline{u} = -3i + j + 2k$; $\overline{v} = 5i - j + 3k$; $\overline{w} = 2i + 3j - 4k$; எனில் $\overline{u} \cdot (\overline{v} \times \overline{w})$ன் மதிப்பும், $\overline{v} \cdot (\overline{u} \times \overline{w})$ன் மதிப்பும் காண்க.

3. $\overline{u} = -i + j - k$; $\overline{v} = 3i - j + 7k$; $\overline{w} = 6i - 4j + k$ எனில் $\overline{u} \cdot \overline{v} \times \overline{w}$, $\overline{u} \cdot \overline{w} \times \overline{v}$, $\overline{v} \cdot \overline{u} \times \overline{w}$, $\overline{v} \cdot \overline{w} \times \overline{u}$ ஆகிய மதிப்புகளைக் காண்க.

4. $5i + 6j + 7k$; $7i - 8j + 9k$; $3i + 20j + 5k$, என்ற வெக்டர்கள் ஒருதள அமைவுடையன என நிறுவுக. (B. Sc. து. பா. '63)

5. $\overline{a} = 2i + lj - 5k$; $\overline{b} = 3i - 3j + 6k$; $\overline{c} = li + 2j - 5k$; என்பவை ஒரேதள வெக்டர்களாக அமைய lன் மதிப்பு என்ன?

6. $4i + 5j + k$; $-j - k$; $3i + 9j + 4k$; $-4i + 4j + 4k$; என்பவை ஒருதள அமைப்புடைய புள்ளிகள் என நிறுவுக.

7. $\overline{a}=2j-k$; $\overline{b}=5i+3j+4k$; $\overline{c}=i-3j$ எனில் $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})$ன் மதிப்பு என்ன ?

8. $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})$; $\overline{b}\times(\overline{c}\times\overline{a})$; $\overline{c}\times(\overline{a}\times\overline{b})$ ஆகியவை ஒருதள வெக்டர்கள் எனக்காட்டு. (B. Sc. செப். 68)

9. $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{a}) = (\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{a}$ எனக் காண்பி.

10. $(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c} = \overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})$ எனில் $(\overline{c}\times\overline{a})\times\overline{b}=0$ என இருந்தாக வேண்டும் என நிறுவுக.

11. $\overline{a}$யும் $\overline{b}$யும் இணையானால் $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}) = \overline{b}\times(\overline{a}\times\overline{c})$ என நிறுவுக.

12. $(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c}=\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})=0$ எனில் $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ மூன்றும் இணை வெக்டர்கள் என நிறுவுக.

13. $\overline{r} = \frac{1}{2}[i\times(\overline{r}\times i)+j\times(\overline{r}\times j)+k\times(\overline{r}\times k)]$ என நிறுவுக.

14. $\overline{\alpha}=3i+2j-k$; $\overline{\beta}=i-k$; $\overline{\gamma}=2j-k$; $\overline{\delta}=3i+j-2k$ எனில் $(\overline{\alpha}\times\overline{\beta})\cdot(\overline{\gamma}\times\overline{\delta})$ன் மதிப்பைக் காண்க. (B. Sc. ஏப். 69)

15. $\overline{u} = i-j+3k$; $\overline{v} = 2i+2j+4k$; $\overline{w} = -3i+6j+k$; $\overline{r} = 4i-5j+7k$ எனில் $(\overline{u}\times\overline{v})\times(\overline{w}\times\overline{r})$ன் மதிப்பு என்ன ?

16. $[\,\overline{a}\times\overline{p}, \overline{b}\times\overline{q}, \overline{c}\times\overline{r}\,] = [\,\overline{a}\;\overline{p}\;\overline{q}\,][\,\overline{b}\;\overline{c}\;\overline{r}\,] - [\,\overline{a}\;\overline{p}\;\overline{b}\,][\,\overline{q}\;\overline{c}\;\overline{r}\,]$ எனக் காண்பி.

அதனின்றும்

$[\,\overline{a}\times\overline{p}, \overline{b}\times\overline{q}, \overline{c}\times\overline{r}\,] + [\,\overline{a}\times\overline{q}, \overline{b}\times\overline{r}, \overline{c}\times\overline{p}\,] + [\,\overline{a}\times\overline{r}, \overline{b}\times\overline{p}, \overline{c}\times\overline{q}\,] = 0$ என நிறுவுக.

17. $[\,(\overline{a}\times\overline{b})\times(\overline{a}\times\overline{c})\,]\cdot\overline{d} = (\overline{a}\cdot\overline{d})[\,\overline{a}\;\overline{b}\;\overline{c}\,]$ என நிறுவுக.

18. $(\overline{b}\times\overline{c})\times(\overline{c}\times\overline{a}) = [\,\overline{a}\;\overline{b}\;\overline{c}\,]\,\overline{c}$ என நிறுவுக. அதனின்றும் $[\,\overline{b}\times\overline{c}, \overline{c}\times\overline{a}, \overline{a}\times\overline{b}\,] = [\,\overline{a}\;\overline{b}\;\overline{c}\,]^2$ எனக் கொண்டுவருக.

19. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான வெக்டர்கள் எனில், $[\,\overline{a}\;\overline{b}\;\overline{c}\,]^2 = \overline{a}^2\,\overline{b}^2\,\overline{c}^2$ என்று நிறுவுக.

20. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்பன ஒருதளத்திலில்லாத வெக்டர்கள் எனில் $\overline{b}\times\overline{c}$, $\overline{c}\times\overline{a}$, $\overline{a}\times\overline{b}$; என்பவற்றை $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$யின் மதிப்புகளில் எழுதுக.

21. $\overline{p} = \dfrac{\overline{b}\times\overline{c}}{[\,\overline{a}\;\overline{b}\;\overline{c}\,]}$; $\overline{q} = \dfrac{\overline{c}\times\overline{a}}{[\,\overline{a}\;\overline{b}\;\overline{c}\,]}$; $\overline{r} = \dfrac{\overline{a}\times\overline{b}}{[\,\overline{a}\;\overline{b}\;\overline{c}\,]}$ எனில்,

(i) $\overline{d}$ எனும் ஏதோ ஒரு வெக்டருக்கு

$$(\overline{p}\cdot\overline{d})\,\overline{a}+(\overline{q}\cdot\overline{d})\,\overline{b}+(\overline{r}\cdot\overline{d})\,\overline{c} = \overline{d}$$

(ii) $\overline{a} \cdot \overline{p} + \overline{b} \cdot \overline{q} + \overline{c} \cdot \overline{r} = 3$

(iii) $[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}] = \dfrac{1}{[\overline{p}\ \overline{q}\ \overline{r}]}$ என நிறுவுக.

22. $[\overline{a}\times\overline{b}, \overline{c}\times\overline{d}, \overline{e}\times\overline{f}] = [\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{d}][\overline{c}\ \overline{e}\ \overline{f}] - [\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}][\overline{d}\ \overline{e}\ \overline{f}]$
$= [\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{e}][\overline{f}\ \overline{c}\ \overline{d}] - [\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{f}][\overline{e}\ \overline{c}\ \overline{d}]$
$= [\overline{c}\ \overline{d}\ \overline{a}][\overline{b}\ \overline{e}\ \overline{f}] - [\overline{c}\ \overline{d}\ \overline{b}][\overline{a}\ \overline{e}\ \overline{f}]$ எனவும் நிறுவுக.

23. $(\overline{a}\times\overline{b})\times(\overline{c}\times\overline{d}) + (\overline{a}\times\overline{c})\times(\overline{d}\times\overline{b}) + (\overline{a}\times\overline{d})\times(\overline{b}\times\overline{c})$
$= -2[\overline{b}\ \overline{c}\ \overline{d}]\,\overline{a}$ என நிறுவுக.

24. $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ என்ற மூன்று ஓரலகு வெக்டர்கள் $\hat{a} \times (\hat{b} \times \hat{c}) = \dfrac{\hat{b}}{2}$ என அமைந்தால், $\hat{b}$யும் $\hat{c}$யும் இணையில்லை யெனில் $\hat{b}$யுடனும், $\hat{c}$யுடனும் $\hat{a}$ உருவாக்கும் கோணங்களைக் கணக்கிடுக.

5. வடிவ கணிதத்தில் வெக்டர் முறையைப் பின்பற்றுதல்

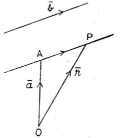
§ 5·01. நேர்கோடுகள்

ஆயத்தொலைவடிவ கணிதத்தில் இரு அச்சுக்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளை வரையறுக்கிறோம். பின்னர் நேர்கோட்டிற்கோ, அல்லது ஏதேனும் வளைவரைக்கோ சமன்பாடு காணும்போது, அந்நேர்கோட்டின்மேல் அல்லது வளைவரையின் மேல் அமைந்த புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளுக்கும் வேறு சில கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக் குறிக்கும் சில மாறிலி மதிப்புகளுக்கும் இடைப்பட்ட தொடர்பினைக் காண்கிறோம். அத்தொடர்பினையே அந் நேர்கோட்டின் அல்லது வளைவரையின் சமன்பாடு என்று அழைக்கிறோம். எடுத்துக் காட்டாக $y = x$ என்பது ஒரு நேர்கோடு என்றால், அக்கோட்டின் மேல் அமையும் புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றின் x ஆயத்தொலையும் அவ்வவற்றின் y ஆயத்தொலைக்குச் சமமாயிருக்கும். அவ்வாறு x, y, ஆயத்தொலைகள் சமமில்லாத புள்ளிகள் அந்நேர்கோட்டிலமையா. இதுபோலவே x ஆயத்தொலையின் இருபடியும் y ஆயத்தொலையின் இருபடியும் கூட்டினால் a^2 என அமையுமாறு உள்ள புள்ளிகள் அனைத்தும், ஆய ஆதியை மையமாகவும், 'a' எனும் ஆரமும் உடைய வட்டப்பரிதியில் அமைகின்றன. அதாவது $x^2 + y^2 = a^2$ என்பது மேற்கூறிய வட்டத்தின் சமன்பாடு என்றழைக்கப்பெறும். இத்தொடர்புக்கு ஒவ்வாத ஆயத் தொலைகள் உள்ள புள்ளிகள் எல்லாம் வட்டத்தின் பரிதியில் அமையா. இதுபோன்றே ஒரு நேர்கோடு அல்லது வளைவரையின் வெக்டர் சமன் பாடு காண்பதிலும், அந்நேர்கோட்டில் அல்லது வளைவரையில் அமை யும் புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்களுக்கும், வேறு சில கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக் குறிக்கும் வெக்டர், திசையிலி ஆகியவற்றிற்கும் இடையில் உள்ள தொடர்பு காணப்படவேண்டும். அத்தொடர்பே அக்கோட்டின் அல்லது வளைவரையின் வெக்டர் சமன்பாடாகும். இங்கு, நாம், சில

விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளபோது நேர்கோடுகளின் வெக்டர் சமன்பாடுகள் காணும் வழி முறைகளை ஆராய்வோம்.

§ 5·02. ஒரு குறிப்பிட்ட வெக்டரின் திசையில் அமைவதும், கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளிவழிச் செல்வதுமான நேர் கோட்டின் சமன்பாடு காணுதல்

A என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி. $\bar{b}$ என்பது கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் வெக்டர். O என்பது வெக்டர் ஆதி. A வழியே $\bar{b}$க்கு இணையாக வரையப்படும் நேர் கோட்டின் சமன்பாடு காணப்படவேண்டும். நேர்கோட்டின்மீது *P* எனும் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி எடுத்துக்கொள்க.



படம் 66.

$\overline{OA}$ = *A*யின் நிலைவெக்டர் = $\bar{a}$;

$\overline{OP}$ = *P*யின் நிலைவெக்டர் = $\bar{r}$ என்க.

$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$ (வெக்டர் கூட்டல் விதிப்படி)

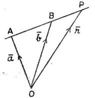
ஆனால் $\overline{AP}$ என்ற வெக்டர் $\bar{b}$க்கு இணையாகையால், ஏதேனும் ஒரு தகுந்த திசையிலி எண் *t* யானது $\overline{AP} = t\bar{b}$ எனுமாறு காண இயலும்.

$$\therefore \quad \bar{r} = \overline{OP}$$
$$= \overline{OA} + \overline{AP}$$
$$= \bar{a} + t\bar{b} \qquad \dots (1)$$

*P*யின் நிலை மாற மாற, *t*ன் மதிப்பும் மாறும். மறுதலையாக *t*ன் எம்மதிப்பிற்கும் (1)ல் இருந்து கிடைக்கும் நிலைவெக்டர் $\bar{r}$க்குத்தக அந் நேர்கோட்டில் ஒரு புள்ளி கிடைக்கும்.

எனவே சமன்பாடு (1), *AP* எனும் நேர் கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடாகும்.

§ 5·03. கொடுக்கப்பட்ட இருபுள்ளிகளை இணைக்கும் நேர் கோட்டின் சமன்பாடு காணுதல்



படம் 67.

A, B என்பன கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள். அவற்றின் நிலை வெக்டர்கள் $\bar{a}, \bar{b}$ என்க.

$$\therefore \quad \overline{AB} = \bar{b} - \bar{a}.$$

ABயின் மீது, P எனும் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி எடுத்தால், $\overline{AP} = t\overline{AB}$ எனுமாறு ஒரு திசையிலி 't' காண இயலும்.

$$\therefore \quad P\text{யின் நிலைவெக்டர் } \overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$$

$$\text{i.e.} \quad \bar{r} = \bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a}) = (1-t)\bar{a} + t\bar{b}.$$

நேர்கோட்டின் மேல் Pயின் எந்த நிலைக்கும் இது பொருந்துமாதலால், இதனை அந்நேர் கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடு என்கிறோம். 't' என்பது துணை மாறியாகச் (parameter) செயல்படும்.

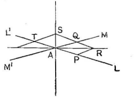
குறிப்பு : $\bar{r}, \bar{a}, \bar{b}$ எனும் நிலைவெக்டர்களுடைய மூன்று புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டிலமையத் தேவையான கட்டுப்பாடு இச்சமன்பாட்டில் நிறைவு செய்யப்படுகிறது. ஏனெனில்,

$\bar{r} - (1-t)\bar{a} - t\bar{b} = 0$ எனும் சமன்பாட்டில் $\bar{r}$ஐ 1ம்,

$\bar{a}$ஐ $-(1-t)$யும், $\bar{b}$ஐ $-t$யும் பெருக்கிக் கூட்டினால் பூச்சியமாகிறது. மேலும் $1 + [-(1-t)] + (-t) = 0$.

§ 5·04. $\bar{r} = \bar{a} + t\bar{b}$, $\bar{r} = \bar{a} + s\bar{c}$ எனும் இரு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணங்களின் இருசம வெட்டிகளின் வெக்டர் சமன்பாடு காணுதல்

AL, AM என்பன கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடுகள். ஏதேனும் ஓர் ஆதியைப் பொறுத்து Aயின் நிலைவெக்டர் $\bar{a}$ என்க. ALன் திசை $\bar{b}$க்கு இணையெனவும், AMன் திசை $\bar{c}$க்கு இணையெனவும் கொண்டால்,



படம் 68.

ALன் வெக்டர் சமன்பாடு $\overline{r} = \overline{a} + t\overline{b}$,

AMன் வெக்டர் சமன்பாடு $\overline{r} = \overline{a} + s\overline{c}$.

இதில் **t, s** ஆகியவை திசையிலிகள்.

ALல் Pயும், AMல் Qவும், LAயின் நீட்சியில் Tம் $AP = AQ = AT = 1$ அலகு எனும்படி எடுத்துக்கொள்க. சாய்சதுரம் $APRQ$வையும், $AQST$யையும் நிறைவு செய்க. சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் அம்மூலைகளில் உள்ள கோணங்களையும் இரு சம கூறுக்கும்' என்பதால் AR, ASன் வெக்டர் சமன்பாடுகள் தான் நாம் காண வேண்டியவையாகும்.

ALன் திசையிலமைந்த ஓரலகு வெக்டர் $= \dfrac{\overline{b}}{|\overline{b}|} = \overline{AP}$.

AMன் திசையிலமைந்த ஓரலகு வெக்டர் $= \dfrac{\overline{c}}{|\overline{c}|} = \overline{AQ}$.

AL'ன் திசையிலமைந்த ஓரலகு வெக்டர் $= \dfrac{-\overline{b}}{|\overline{b}|} = \overline{AT}$.

$$\overline{AR} = \overline{AP} + \overline{AQ} = \frac{\overline{b}}{|\overline{b}|} + \frac{\overline{c}}{|\overline{c}|}.$$

ARன் நீட்சியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி X எடுத்தால், அதன் நிலை வெக்டர் $\overline{r} = \overline{OX} = \overline{OA} + \overline{AX}$

$= \overline{a} + t\,\overline{AR}$ "t" என்பது ஏதோ ஒரு தகுந்த எண்.

$\therefore\ \overline{r} = \overline{a} + t\left\{\dfrac{\overline{b}}{|\overline{b}|} + \dfrac{\overline{c}}{|\overline{c}|}\right\}$ என்பதுதான் AR என்ற இருசம வெட்டியின் வெக்டர் சமன்பாடாகும்.

வெளிப்புற இருசம வெட்டியைக் காண $AQST$ என்ற சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டம் AS காணவேண்டும்.

$$\overline{AQ} = \frac{\overline{c}}{|\overline{c}|};\ \overline{AT} = \frac{-\overline{b}}{|\overline{b}|}$$

$$\therefore\ \overline{AS} = \overline{AQ} + \overline{QS}$$

$$= \overline{AQ} + \overline{AT}$$

$$= \frac{\overline{c}}{|\overline{c}|} - \frac{\overline{b}}{|\overline{b}|}$$

$\therefore\ AS$ன் மேல் அமைந்த ஏதேனும் ஒரு புள்ளி Y எடுத்தால்,

$$\overline{AY} = s\,\overline{AS}$$

$$= s\left\{\frac{\overline{c}}{|\overline{c}|} - \frac{\overline{b}}{|\overline{b}|}\right\}$$

$$\therefore\ \bar{r} = Y\text{ன் நிலைவெக்டர்}$$
$$= \overline{OA} + \overline{AY}$$
$$= \bar{a} + s\left(\frac{\bar{c}}{|\bar{c}|} - \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}\right)$$

அதாவது இரு சமவெட்டிகளின் சமன்பாடுகள்

$$\bar{r} = \bar{a} + t\left(\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} + \frac{\bar{c}}{|\bar{c}|}\right)$$

$$\bar{r} = \bar{a} + s\left(\frac{\bar{c}}{|\bar{c}|} - \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}\right) \text{ ஆகும்.}$$

t, s என்பன துணை மாறிகள்.

எடுத்துக்காட்டு 1: $\bar{a} + 3\bar{b} - 4\bar{c}$, என்ற புள்ளி வழியே $\bar{e}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாகச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு என்ன? (BSc. து. பா. '65)

Aயின் நிலைவெக்டர் $= \bar{a} + 3\bar{b} - 4\bar{c}$

நேர்கோட்டில் P எனும் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $\bar{r}$ என்க.

$\overline{AP}$, $\bar{e}$க்கு இணையாகையால், t எனும் திசையிலி ஒன்று

$\overline{AP} = t\bar{e}$ எனுமாறு காணலாம்.

$$\therefore\ \bar{r} = \overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$$
$$= \bar{a} + 3\bar{b} - 4\bar{c} + t\bar{e}.$$

tன் மதிப்பு மாற மாற, நேர்கோட்டிலுள்ள புள்ளிகள் அனைத்தின் நிலைவெக்டர்கள் காண இயலும். எனவே இதுவே வேண்டப்பட்ட நேர்கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2: $5i + 4j - 6k$; $3i - 7j + 11k$; என்ற இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

Aயின் நிலைவெக்டர் $= 5i + 4j - 6k$;

Bயின் நிலைவெக்டர் $= 3i - 7j + 11k$; எனக் கொள்க.

$$\therefore\ \overline{AB} = -2i - 11j + 17k;$$

கோட்டின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி Pயின் நிலைவெக்டர் $\bar{r}$ என்க.

$\therefore\ \overline{AP} = t\overline{AB}$ எனும்படி 't' எனும் ஓர் எண்காண இயலும்.

$$\therefore\ \bar{r} = \overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$$
$$= 5i + 4j - 6k + t(-2i - 11j + 17k)$$
$$= (5 - 2t)i + (4 - 11t)j + (17t - 6)k.$$

tன் மதிப்பு மாற மாற, கோட்டின் மீதமையும் எல்லாப் புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்களும் கிடைக்கும். எனவே இதுவே இக்கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

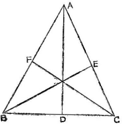
எடுத்துக்காட்டு 3 : நிலைவெக்டர் $\overline{a}$ உடைய A என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்ற வெக்டர்களுக்குச் செங்குத்தானதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு என்ன?

$\overline{b}$, $\overline{c}$ என்ற வெக்டர்களுக்குச் செங்குத்தான வெக்டர் $\overline{b}\times\overline{c}$ ஆகும். எனவே $\overline{b}$க்கும் $\overline{c}$க்கும் செங்குத்தான கோடு $\overline{b}\times\overline{c}$க்கு இணையாகும்.

$\therefore$ $\overline{a}$ வழியே, $\overline{b}\times\overline{c}$க்கு இணையான கோடு

$\overline{r} = \overline{a} + t(\overline{b}\times\overline{c})$ ஆகும்; t என்பது திசையிலி.

எடுத்துக்காட்டு 4 : ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக் கோடுகள் ஒரே புள்ளியிற் சந்திக்கும் என நிறுவி, அப்புள்ளியின் நிலைவெக்டரைக் காண்க.



படம் 69.

ABC என்ற முக்கோணத்தின் முனைகள் A, B, Cயின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்க.

BCயின் நடுப்புள்ளி Dயின் நிலைவெக்டர் $= \dfrac{\overline{b}+\overline{c}}{2}$;

CAயின் நடுப்புள்ளி Eயின் நிலைவெக்டர் $= \dfrac{\overline{c}+\overline{a}}{2}$;

ABயின் நடுப்புள்ளி Fன் நிலைவெக்டர் $= \dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$;

$\therefore$ ADயின் வெக்டர் சமன்பாடு

$$\overline{r} = \overline{a} + t\overline{AD}$$

$$= \overline{a} + t\left\{\frac{\overline{b}+\overline{c}}{2} - \overline{a}\right\}$$

BEயின் வெக்டர் சமன்பாடு

$$\overline{r} = \overline{b} + s\overline{BE}$$

$$= \overline{b} + s\left\{\frac{\overline{c}+\overline{a}}{2} - \overline{b}\right\}$$

இவ்விரண்டின் வெட்டும் புள்ளி Gயின் நிலைவெக்டர் $t = t_1$; $s = s_1$ எனும்போது கிடைப்பதாகக் கொண்டால்,

$$\overline{a} + t_1\left(\frac{\overline{b}+\overline{c}}{2} - \overline{a}\right) = \overline{b} + s_1\left(\frac{\overline{c}+\overline{a}}{2} - \overline{b}\right)$$

∴ வெக்டர்களின் கெழுக்களைச் சமப்படுத்தினால்,

$$(1-t_1) = \frac{s_1}{2}$$

$$\frac{t_1}{2} = 1 - s_1$$

$$\therefore \quad \frac{t_1}{2} = \frac{s_1}{2}$$

$$\therefore \quad t_1 = s_1$$

$$\therefore \quad \frac{3s_1}{2} = 1; \quad s_1 = \tfrac{2}{3} = t_1$$

$$\therefore \quad \overline{r} = \overline{a} + \tfrac{2}{3}\left(\frac{\overline{b}+\overline{c}}{2} - \overline{a}\right)$$

$$= \frac{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}}{3}$$ என்பதுதான் இரு நடுக்கோடுகளும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளி Gயின் நிலைவெக்டராகும்.

CFன் வெக்டர் சமன்பாடு

$\overline{r} = \overline{c} + l(\overline{CF})$ l என்பது ஒரு திசையிலி.

$$= \overline{c} + l\left(\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2} - \overline{c}\right)$$

lன் l_1 என்ற மதிப்பிற்கும், $t = t_2$ என்ற மதிப்பிற்கும் தக,

$\overline{r} = \overline{a} + t\left(\frac{\overline{b}+\overline{c}}{2} - \overline{a}\right)$யும்,

$\overline{r} = \overline{c} + l\left(\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2} - \overline{c}\right)$யும்,

வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியின் நிலைவெக்டர் கிடைக்கும் என்க.

∴ நிலைவெக்டர்களைச் சமப்படுத்தினால்,

$$\overline{a} + t_2\left(\frac{\overline{b}+\overline{c}}{2} - \overline{a}\right) = \overline{c} + l_1\left(\frac{\overline{a}+\overline{b}}{2} - \overline{c}\right)$$

$$\overline{a}(1-t_2) + \frac{t_2}{2}\,\overline{b} + \frac{t_2}{2}\,\overline{c} = \frac{l_1}{2}\,\overline{a} + \frac{l_1}{2}\,\overline{b} + \left(1 - \frac{l_1}{2}\right)\overline{c}$$

∴ கெழுக்களைச் சமப்படுத்தினால்,

$$1-t_2 = \frac{l_1}{2};\ \frac{t_2}{2} = \frac{l_1}{2};$$

$$\therefore\ t_2 = l_1;$$

$$1 = 3\frac{l_1}{2} \qquad \therefore\ l_1 = \tfrac{2}{3} = t_1$$

∴ வெட்டும் புள்ளியின் நிலைவெக்டர்

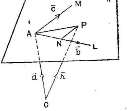
$$= \overline{a}+\tfrac{2}{3}\left(\frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}-\overline{a}\right) = \frac{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}}{3}.$$

இவ்வாறு ADயும் CFம் Gயில் வெட்டுகின்றன. எனவே மூன்று நடுக்கோடுகளும் $\frac{\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}}{2}$ல் வெட்டிக்கொள்கின்றன.

§ 5·05. சமதளங்கள் (Planes)

ஒரு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிவழிச் செல்வதும் இரு வெக்டர்களின் திசைக்கு இணையாய் உள்ளதுமான ஒரு தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு காணல்.

π என்ற தளம் A என்ற புள்ளிவழிச் செல்கிறது. $\overline{b}, \overline{c}$ என இரு கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்களுக்கு இணையாகவும் அமைந்துள்ளது. அதன் வெக்டர் சமன்பாடு வேண்டப்படுகிறது.



படம் 70.

Aயின் நிலைவெக்டர் $\overline{a}$ என்க. தளத்தில் P என ஏதேனும் ஒரு புள்ளி எடுத்து APயைச் சேர். Aயின் வழி $\overline{b}$க்கும், $\overline{c}$க்கும் இணையான கோடுகள் முறையே AL, AM வரை. Pயின் வழியாக $\overline{c}$க்கு இணைகோடு வரைந்து அது ALஐ வெட்டும் புள்ளியை N எனக் குறித்திடுக.

$$P\text{யின் நிலைவெக்டர் } \overline{OP} = \overline{OA}+\overline{AP}$$

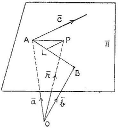
$$= \overline{OA}+\overline{AN}+\overline{NP}$$

ஆனால் $\overline{AN}$, $\overline{b}$க்கு இணை. $\overline{NP}$, $\overline{c}$க்கு இணை. எனவே t, s என இரு திசையிலி எண்கள் $\overline{AN} = t\overline{b}$ எனுமாறும் $\overline{NP} = s\overline{c}$ எனுமாறும் அமையும்படி காண இயலும்.

$$\therefore \quad \overline{OP} = \overline{r} = \overline{a} + t\overline{b} + s\overline{c}.$$

t, s என்பன துணைமாறிகளாகச் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் மதிப்பு மாற மாற, மேற்கண்ட சமன்பாடு சமதளத்தின்மீதுள்ள எல்லா புள்ளிகளின் நிலைவெக்டரையும் கொடுக்கும். இதுவே அச்சமதளத்தின் சமன்பாடு ஆகும்.

§ 5·6 கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகளின் வழியாகவும், ஒரு வெக்டருக்கு இணையாகவும் உள்ள ஒரு சமதளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு காணுதல்.



படம் 71.

A, B என்ற இரு புள்ளிகளின் வழியாகவும், $\overline{c}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாகவும், ஒரு தளம் π அமைந்துள்ளது. அத்தளத்தில் P எனும் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை எடுத்து OP, APகளைச் சேர்க்கவும். P வழியாக $\overline{c}$க்கு இணை கோடு வரைந்து, அது ABயை வெட்டுமிடத்தை L எனக் குறிக்கவும்.

Aயின் நிலைவெக்டர் $\overline{a}$ எனவும், Bயின் நிலைவெக்டர் $\overline{b}$ எனவும் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \overline{AB} = \overline{b} - \overline{a},$$

எனவே $\overline{AL} = t\,(\overline{AB})$ (t என்பது ஏதோ ஒரு தகுந்த திசையிலி)

$$= t\,(\overline{b} - \overline{a})$$

மேலும் $\overline{LP}$, $\overline{c}$க்கு இணையாதலால் 's' எனும் திசையிலி ஒன்று $\overline{LP} = s\overline{c}$ எனும்படி காண இயலும்.

$$\therefore\ \overline{OP} = \overline{r} = \overline{OA}+\overline{AP}$$
$$= \overline{OA}+\overline{AL}+\overline{LP}$$
$$= \overline{a}+t\,(\overline{b}-\overline{a})+s\overline{c}$$
$$= \overline{a}\,(1-t)+t\overline{b}+s\overline{c}.$$

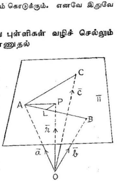
t, *s*ன் மதிப்புகள் மாற மாற, இச்சமன்பாடு சமதளத்திலுள்ள எல்லாப்புள்ளிகளின் நிலைவெக்டரையும் கொடுக்கும். எனவே இதுவே அச்சமதளத்தின் சமன்பாடாகும்.

§ 5·07. கொடுக்கப்பட்ட மூன்று புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் சமதளத்தின் சமன்பாடு காணுதல்

A, *B*, *C* எனும் மூன்று புள்ளிகள் வழியே π எனும் தளம் செல்கிறது. அத்தளத்தில் *P* எனும் ஒரு புள்ளி எடு. *A*, *B*, *C*யின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ எனவும், *P*யின் நிலைவெக்டர் $\overline{r}$ எனவும் கொள்க. *P*யின் வழியாக *AC*க்கு இணையாய் ஒரு நேர்கோடு வரை. அது *AB*யை *L*ல் வெட்டட்டும்.

$$\therefore\ \overline{AL} = t\overline{AB};$$

$\overline{LP} = s\overline{AC}$ எனுமாறு இரு திசையிலி எண்கள் *t*, *s* காண இயலும்.



படம் 72.

ஆனால் $\overline{AB} = \overline{b} - \overline{a}$; $\overline{AC} = \overline{c} - \overline{a}$,

$$\therefore\ \overline{OP} = \overline{r} = \overline{OA} + \overline{AL} + \overline{LP}$$
$$= \overline{a} + t\,(\overline{b} - \overline{a}) + s\,(\overline{c} - \overline{a})$$
$$= \overline{a}\,(1-t-s)+t\overline{b}+s\overline{c}.$$

இதுவே அத்தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடாகும்.

§ 5·08. நான்கு புள்ளிகள் ஒரு தளத்தில் அமையத் தேவையானதும், போதுமானதுமான கட்டுப்பாடுகள்

$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ எனும் நிலைவெக்டர்கள் கொண்ட நான்கு புள்ளிகள் ஒரு சமதளத்தில் அமைவன எனில் *w*, *x*, *y*, *z* எனும் நான்கு எண்கள்

$w\overline{a}+x\overline{b}+y\overline{c}+z\overline{d}=0$ எனவும், $w+x+y+z=0$ எனவும் இருக்குமாறு காண இயலுதல் வேண்டும்.

முதலில் நான்கு புள்ளிகள் ஒரு சமதளத்திலிருந்தால் இக்கட்டுப்பாடு தேவையென்பதாக நிறுவுவோம்.

A, B, C, D என்ற நான்கு புள்ளிகள் $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ என்ற நிலைவெக்டர்களுடையன என்க. அவை ஒரே தளத்திலிருக்கின்றன என்போம். இந்த நான்கு புள்ளிகளும் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையவில்லை என எடுத்துக்கொள்கிறோம். ஏனெனில் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைந்துவிட்டால், அவற்றின் வழியாக எண்ணிலாத சமதளங்கள் வரைய இயலும். நான்கும் ஒரே நேர் கோட்டில் இல்லையெனில், குறைந்தது இரு நேர்கோடுகளாவது கிடைக்கும். அவையிரண்டும் வெட்டும் புள்ளி முதற்கோட்டை ஒரு விகிதத்திலும், இரண்டாவது கோட்டை வேறொரு விகிதத்திலும் பிரிக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, ABயும் CDயும் வெட்டும் புள்ளி E என்போம். Abயை E யானது $l:m$ எனும் விகிதத்திலும், CDயை $p:q$ எனும் விகிதத்திலும் பிரிப்பதாகக் கொள்வோம்.

எனவே Eயின் நிலைவெக்டர் $\dfrac{m\overline{a}+l\overline{b}}{m+l}$ எனவும்,

இரண்டாவது கோட்டிலிருந்து $\dfrac{q\overline{c}+p\overline{d}}{q+p}$ எனவும் கிடைக்கும்.

இவையிரண்டும் ஒரே புள்ளி Eயைக் குறிப்பதால்,

$$\frac{m\overline{a}+l\overline{b}}{m+l} = \frac{q\overline{c}+p\overline{d}}{q+p};$$

i.e. $(q+p)\,(m\overline{a}+l\overline{b}) = (m+l)\,(q\overline{c}+p\overline{d})$

i.e. $m\,(q+p)\,\overline{a}+l\,(q+p)\,\overline{b}-(m+l)\,q\overline{c}-(m+l)\,p\overline{d}=0$

மேலும் $m\,(q+p)+l\,(q+p)-(m+l)\,q-(m+l)\,p$

$= mq+mp+lq+lp-mq-lq-mp-lp=0$

எனவே $m\,(q+p)=w$, $l\,(q+p)=x$; $-(m+l)\,q=y$; $-(m+l)\,p=z$ எனில்

$$w\overline{a}+x\overline{b}+y\overline{c}+z\overline{d}=0$$
$$w+x+y+z=0.$$

எனவே இக்கட்டுப்பாடுகள் தேவையென்பது நிறுவப்படுகிறது. இனி இவை போதுமென நிறுவுவோம்.

$w\overline{a}+x\overline{b}+y\overline{c}+z\overline{d}=0$;

$w+x+y+z=0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore\ w\overline{a}+x\overline{b} = -(y\overline{c}+z\overline{d})$$

மேலும் $w+x = -(y+z)$

$$\therefore\ \frac{w\overline{a}+x\overline{b}}{w+x} = \frac{y\overline{c}+z\overline{d}}{y+z}.$$

அதாவது ABயை $x : w$ எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியும் CDயை $z : y$ எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியும் ஒன்றே. அதாவது ABயும் CDயும் வெட்டிக்கொள்கின்றன. அதாவது, A, B, C, D ஒரே சமதளத்தில் அமைகின்றன.

§ 5·09. சமதளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு செங்குத்துக் கோட்டு அமைப்பு (normal form)

π என்ற சமதளத்திற்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் p என்க. குத்துக் கோட்டின் அடி K என்க. தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர் $\hat{n}$ என்க.

$$\therefore\ \overline{OK} = p\hat{n}$$

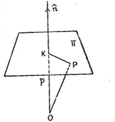
சமதளத்தில் P எனும் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி எடுத்துக்கொள்க.

$\overline{OP} = \overline{r}$ என்க.

PK, OKக்குச் செங்குத்து ஆதலால், OKயின் மேல் OPயின் வீழல்

$= OK = p$ ஆகும்.

அதாவது $\overline{r}\cdot\hat{n} = p$



படம் 73.

சமதளத்திலுள்ள Pயின் எந்த நிலைக்கும் இது பொருந்துமாகையால் இதுவே அத்தளத்தின் சமன்பாடாகும்.

துணைமுடிவு 1: $\overline{n}$ என்பது ஓரலகு வெக்டரில்லாமல் இருந்தாலும் $\overline{r}\cdot\overline{n} = q$ எனும் சமன்பாடு $\overline{n}$க்குச் செங்குத்தாய் அமையும் ஒரு தளத்தினைக் குறிக்கும். ஏனெனில் அதே சமன்பாட்டை $\frac{\overline{r}\cdot\overline{n}}{|\overline{n}|} = \frac{q}{|\overline{n}|}$ என நாம் எழுத இயலும். இது $\frac{q}{|\overline{n}|}$ எனும் செங்குத்துத் தூரத்தில் உள்ள சமதளத்தின் சமன்பாடாகும்.

துணைமுடிவு 2: $A\ (\overline{a})$ எனும் புள்ளி வழிச் சென்று, $\overline{n}$க்குச் செங்குத்தாக அமைந்த ஒரு சமதளத்தின் சமன்பாடு $(\overline{r}-\overline{a})\cdot\overline{n} = 0$ என்பதாகும்.

ஏனெனில் $\overline{n}$ என்ற வெக்டர், சமதளத்திற்குச் செங்குத்தாகையால், அத்தளத்திலுள்ள எந்த நேர்கோட்டிற்கும் செங்குத்தாக இருக்கும். எனவே ஏதேனும் ஒரு புள்ளி Pயை அத்தளத்தில் எடுத்து, Aக்குச் சேர்த்தால், APக்கும் $\overline{n}$ செங்குத்தாகும். ஆனல் $\overline{AP} = \overline{r} - \overline{a}$.

$$\therefore \quad \overline{AP} \cdot \overline{n} = (\overline{r} - \overline{a}) \cdot \overline{n} = 0.$$

துணைமுடிவு 3 : Pயின் மூவளவை ஆயத்தொலைகள் (x, y, z) எனவும், $\overline{n}$ன் திசைக் கொசைன்கள் (l, m, n) எனவும் கொண்டால், $\overline{r} \cdot \overline{n} = p$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து

$$(xi + yj + zk) \cdot (li + mj + nk) = p$$

$$\text{i.e.} \quad lx + my + nz = p$$

இது, ஆதியிலிருந்து p என்ற செங்குத்துத் தொலைவில், செங்குத்துக் கோட்டின் திசைக் கொசைன்கள் l, m, n எனக் கொண்ட சமதளத்தின் மூவளவை ஆயத்தொலை வடிவ கணிதச் சமன்பாடாகும்.

துணைமுடிவு 4 : $A\ (a_1\ a_2\ a_3)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் ஆதியிலிருந்து தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் திசை விகிதங்கள் (Direction ratios) $(n_1\ n_2\ n_3)$ எனவும் கொண்ட தளத்தின் மூவளவை ஆயத்தொலை வடிவ கணிதச் சமன்பாடும் இத னின்றும் பெற இயலும். சமதளத்திலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி Pயின் நிலைவெக்டர் $\overline{r} = xi + yj + zk$.

$$A\text{யின் நிலைவெக்டர் } \overline{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

$$\text{செங்குத்துக் கோட்டு வெக்டர் } \overline{n} = n_1 i + n_2 j + n_3 k$$

PAக்கும் தளத்தின் செங்குத்துக்கோடு செங்குத்தாக இருக்கும்.
எனவே $\overline{AP} \cdot \overline{n} = 0$

$$\text{i.e.} \quad (\overline{r} - \overline{a}) \cdot \overline{n} = 0$$

$$\text{i.e.} \quad (xi + yj + zk - a_1 i - a_2 j - a_3 k) \cdot (n_1 i + n_2 j + n_3 k) = 0$$

$$\text{i.e.} \quad \{(x - a_1)\, i + (y - a_2)\, j + (z - a_3)\, k\} \cdot (n_1 i + n_2 j + n_3 k) = 0$$

$$\text{i.e.} \quad (x - a_1)\, n_1 + (y - a_2)\, n_2 + (z - a_3)\, n_3 = 0$$

குறிப்பு : (1) $\overline{r} \cdot \hat{n} = p$ என்ற சமன்பாட்டில் $\hat{n}$ என்ற ஓரலகு வெக்டர் ஆதியிலிருந்து தளத்தை நோக்கி வரையப்படுவதாகும். pன் மதிப்பு எப்போதும் மிகை எண்ணுகவே இருக்க வேண்டும்.

(2) சமதளத்தின் சமன்பாடு $\overline{r} \cdot \overline{a} = q$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் அதனைச் செங்குத்துக் கோட்டமைப்பாக மாற்ற, வலது பக்கம் மிகை எண்ணுக இருக்கும்படி இருபுறமும் குறியீடுகளை மாற்றிக்

கொள்ளவேண்டும். பின்னர் $|\overline{a}|$ யினல் இருபுறமும் வகுக்கவேண்டும். அப்படியானல்

$$\frac{\overline{r}\cdot\overline{a}}{|\overline{a}|}=\frac{q}{|\overline{a}|} \text{ எனக் கிடைக்கும்.}$$

$\frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$ என்பது ஓரலகு வெக்டர். எனவே $\overline{r}\cdot\hat{n}=p$ என்பதுடன் ஒப்பிட்டால் $p=$ ஆதியிலிருந்து சமதளத்திற்கு வரையப்படும் செங்குத்துத் தூரம் $=\frac{q}{|\overline{a}|}$ ஆகும்.

§ 5·10. $\overline{a}$ எனும் நிலை வெக்டருடைய புள்ளி வழிச் செல்லும் $\overline{b}, \overline{c}$ எனும் இரு வெக்டர்களுக்கு இணையாய் அமைவது மான சமதளத்தின் சமன்பாடு

$$[\overline{r}\ \overline{b}\ \overline{c}]=[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}]$$

$\overline{r}$ என்பது தளத்திலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் நிலைவெக்டர் என்க. அப்படியானல்,

$\overline{r}-\overline{a}$; $\overline{b}$; $\overline{c}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரே தள அமைப்புடையன.

எனவே $(\overline{r}-\overline{a})\cdot\overline{b}\times\overline{c}=0$

i.e. $\overline{r}\cdot\overline{b}\times\overline{c}-\overline{a}\cdot\overline{b}\times\overline{c}=0$

i.e. $[\overline{r}\ \overline{b}\ \overline{c}]-[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}]=0$

$\therefore\ [\overline{r}\ \overline{b}\ \overline{c}]=[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}]$

குறிப்பு: இது $\overline{r}\cdot\overline{n}=q$ என்ற வடிவிலுள்ளது என்பதை உணர்க.

இச் சமன்பாட்டை இன்னொரு வழியிலும் காணலாம்.

$\overline{b}\times\overline{c}$ என்ற வெக்டர் $\overline{b}, \overline{c}$ ஆகியவைக்கு இணையான தளத்திற்குச் செங்குத்து ஆகும்.

$\therefore$ தளத்தின் சமன்பாடு $\overline{r}\cdot\overline{b}\times\overline{c}=q$ என்ற வடிவில் இருக்கும்.

ஆனல் Aயின் வழியாக இத்தளம் செல்வதால்,

$\overline{a}\cdot\overline{b}\times\overline{c}=q$

$\therefore\ \overline{r}\cdot\overline{b}\times\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{b}\times\overline{c}$

i.e. $[\overline{r}\ \overline{b}\ \overline{c}]=[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}]$

§ 5·11. $\overline{a}, \overline{b}$ எனும் நிலை வெக்டர்களுடைய A, B எனும் புள்ளிகள் வழிச் செல்வதும், $\overline{c}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையானதுமான தளத்தின் சமன்பாடு

$$\overline{r}\cdot(\overline{b}\times\overline{c}+\overline{c}\times\overline{a})=[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}]$$

தளத்திலுள்ள p எனும் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $\bar{r}$ எனில், $\overline{AP} = \bar{r}-\bar{a}$; $\overline{AB} = \bar{b}-\bar{a}$; $\bar{c}$ ஆகிய மூன்றும் ஒரே தள அமைப்புடையன.

$$\therefore \ (\bar{r}-\bar{a})\cdot(\bar{b}-\bar{a})\times\bar{c} = 0$$

$$\text{i.e.} \ \bar{r}\cdot(\bar{b}-\bar{a})\times\bar{c} = \bar{a}\cdot(\bar{b}-\bar{a})\times\bar{c}$$

$$\text{i.e.} \ \bar{r}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}) = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}-\bar{a}\times\bar{c})$$

$$= \bar{a}\cdot\bar{b}\times\bar{c}-\bar{a}\cdot\bar{a}\times\bar{c}$$

$$= [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] \quad (\because \ \bar{a}\cdot\bar{a}\times\bar{c}=0)$$

இம்முடிவை இன்னொரு வழியிலும் காணலாம்.

$\bar{b}-\bar{a}$, $\bar{c}$ என்ற வெக்டர்களுக்கு, தளத்தின் குத்துக்கோடு செங்குத்தாக இருக்கும். எனவே $(\bar{b}-\bar{a})\times\bar{c}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாய் இருக்கும்.

$\therefore \ \bar{r}\cdot(\bar{b}-\bar{a})\times\bar{c} = q$ எனும் வடிவில் அமையும்.

ஆனால் $\bar{a}$யின் வழிச் செல்வதால்

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}-\bar{a})\times\bar{c}=q$$

$$\therefore \ \bar{r}\cdot(\bar{b}-\bar{a})\times\bar{c} = \bar{a}\cdot(\bar{b}-\bar{a})\times\bar{c}$$

$$\text{i.e.} \ \bar{r}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}) = [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}].$$

§ 5.12. a, b, c எனும் நிலைவெக்டர்கள் கொண்ட A, B, C எனும் புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு $\bar{r}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}+\bar{a}\times\bar{b}) = [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$

தளத்திலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி Pயின் நிலைவெக்டர் $\bar{r}$ எனில், $\bar{r}-\bar{a}$; $\overline{AB} = \bar{b}-\bar{a}$; $\overline{AC} = \bar{c}-\bar{a}$; எனும் வெக்டர்கள் ஒருதள அமைப்புடையன.

$$\therefore \ (\bar{r}-\bar{a})\cdot(\bar{b}-\bar{a})\times(\bar{c}-\bar{a}) = 0$$

$$\text{i.e.} \ (\bar{r}-\bar{a})\cdot\{\bar{b}\times\bar{c}-\bar{b}\times\bar{a}-\bar{a}\times\bar{c}\} = 0 \quad (\because \ \bar{a}\times\bar{a}=0)$$

$$\text{i.e.} \ (\bar{r}-\bar{a})\cdot\{\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}+\bar{a}\times\bar{b}\} = 0$$

$$\text{i.e.} \ \bar{r}\cdot\{\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}+\bar{a}\times\bar{b}\} = \bar{a}\cdot\{\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}+\bar{a}\times\bar{b}\}$$

$$= \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})+\bar{a}\cdot\bar{c}\times\bar{a} + \bar{a}\cdot\bar{a}\times\bar{b}$$

$$= [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$$

இம்முடிவை மாற்று வழியிலும் காணலாம்.

இத்தளத்தின் குத்துக்கோடு $\bar{b}-\bar{a}$, $\bar{c}-\bar{a}$க்கும் செங்குத்து. எனவே $(\bar{b}-\bar{a})\times(\bar{c}-\bar{a})$க்கு இணை.

$\therefore \ \bar{r}\cdot(\bar{b}-\bar{a})\times(\bar{c}-\bar{a}) = q$ எனக் கிடைக்கும்.

ஆனால் $\bar{a}$ வழிச் செல்வதால்,

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}-\bar{a})\times(\bar{c}-\bar{a}) = q$$

$$\therefore\ \bar{r}\cdot(\bar{b}-\bar{a})\times(\bar{c}-\bar{a}) = \bar{a}\cdot(\bar{b}-\bar{c})\times(\bar{c}-\bar{a})$$

$$\text{i.e. } \bar{r}\cdot\{\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}+\bar{a}\times\bar{b}\} = [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$$

இதனை $[\bar{r}\ \bar{b}\ \bar{c}]+[\bar{r}\ \bar{c}\ \bar{a}]+[\bar{r}\ \bar{a}\ \bar{b}] = [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$ என்றும் எழுதலாம்.

வழி முடிவு: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ எனும் நிலைவெக்டர்களுடைய புள்ளிகள் நான்கும் ஒரே தளத்தில் அமையவேண்டுமாயின், $[\bar{d}\ \bar{b}\ \bar{c}]+[\bar{d}\ \bar{c}\ \bar{a}]+[\bar{d}\ \bar{a}\ \bar{b}]-[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]=0$ ஆக இருக்கவேண்டும். ஏனெனில் $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ மூன்றின் வழிச்செல்லும் சமதளத்தின் சமன்பாடு,

$$[\bar{r}\ \bar{b}\ \bar{c}]+[\bar{r}\ \bar{c}\ \bar{a}]+[\bar{r}\ \bar{a}\ \bar{b}]-[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = 0$$

இதில் $\bar{d}$ அமைவதால்,

$$[\bar{d}\ \bar{b}\ \bar{c}]+[\bar{d}\ \bar{c}\ \bar{a}]+[\bar{d}\ \bar{a}\ \bar{b}]-[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = 0.$$

§ 5·13. ஒரு தளத்திற்கும் ஒரு கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட கோணம்

$\bar{r} = \bar{a}+t\bar{b}$ என்பது நேர்கோடு எனவும் $\bar{r}\cdot\bar{n} = q$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட தளம் எனவும் கொள்க. நேர்கோட்டிற்கும் சமதளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் என்பது, நேர்கோட்டிற்கும் தளத்தின் குத்துக்கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட கோணத்தின் நிரப்புக் கோணமாகும் (Complementary angle). நேர்கோட்டிற்கும் தளத்திற்கும் இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில்,

$$\cos(90-\theta) = \sin\theta = \frac{\bar{b}\cdot\bar{n}}{|\bar{b}|\,|\bar{n}|}$$

$$\therefore\ \theta = \sin^{-1}\left\{\frac{\bar{b}\cdot\bar{n}}{|\bar{b}|\,|\bar{n}|}\right\}$$

கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடு தளத்திற்கு இணையானால் $\theta = 0$

$$\therefore\ \sin\theta = 0 \quad \text{i.e. } \bar{b}\cdot\bar{n} = 0.$$

§ 5·14. இரு சமதளங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

$\bar{r}\cdot\bar{n}_1 = q_1$; $\bar{r}\cdot\bar{n}_2 = q_2$ என்பன இரு சமதளங்கள் என்க. சமதளங்களுக்கிடைப்பட்ட கோணம் θ = சமதளங்களின் குத்துக்கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம்.

எனவே $\cos\theta = \dfrac{\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2}{|\bar{n}_1|\,|\bar{n}_2|}$ எனும் சமன்பாடு இரு தளங்களுக்கிடைப்பட்ட கோணம் θ வைக் கொடுக்கும்.

$$\text{i.e. } \theta = \cos^{-1}\left\{\frac{\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2}{|\bar{n}_1|\,|\bar{n}_2|}\right\}$$

எடுத்துக்காட்டு 1 : $\overline{r} = \overline{a} + t\overline{b}$; $\overline{r} = \overline{c} + s\overline{b}$ எனும் இணை கோடுகளால் உருவாக்கப்படும் தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

$\overline{a}$, $\overline{c}$ எனும் நிலைவெக்டர்களுடைய A, C என்ற புள்ளிகள் கேட்கப்பட்டுள்ள தளத்தில் அமைகின்றன. தளத்திலுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி $\overline{r}$ எனில்; $\overline{AC}$, $\overline{b}$, $\overline{r} - \overline{a}$ ஆகியவை ஒரே தளத்தில் உள்ளன.

$$\therefore \quad (\overline{c} - \overline{a}) \times \overline{b} \cdot (\overline{r} - \overline{a}) = 0$$
$$\text{i.e.} \quad (\overline{r} - \overline{a}) \cdot \{\overline{b} \times (\overline{c} - \overline{a})\} = 0$$
$$\text{i.e.} \quad (\overline{r} - \overline{a}) \cdot \{\overline{b} \times \overline{c} + \overline{a} \times \overline{b}\} = 0$$
$$\text{i.e.} \quad \overline{r} \cdot \overline{b} \times \overline{c} + \overline{r} \cdot (\overline{a} \times \overline{b}) - \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = 0.$$
$$\text{i.e.} \quad [r\,\overline{b}\,\overline{c}] + [\overline{r}\,\overline{a}\,\overline{b}] = [\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}].$$

எடுத்துக்காட்டு 2 : கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்தில் நகரும் ஒரு புள்ளியின் இயங்குவரை (locus) என்ன ?

A, B எனும் இரு புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\overline{a}$, $\overline{b}$ என்க. இவற்றிலிருந்து சமதூரத்தில் நகரும் புள்ளியான pயின் ஏதேனும் ஒரு நிலையில் நிலைவெக்டர் $\overline{r}$ என்க.

$$PA = PB$$
$$\therefore \quad PA^2 = PB^2$$
$$\text{i.e.} \quad |\overline{PA}|^2 = |\overline{PB}|^2$$
$$\text{i.e.} \quad (\overline{r} - \overline{a})^2 = (\overline{r} - \overline{b})^2$$
$$\text{i.e.} \quad -2\overline{r} \cdot \overline{a} + \overline{a}^2 = -2\overline{r} \cdot \overline{b} + \overline{b}^2$$
$$\text{i.e.} \quad \overline{r} \cdot (\overline{a} - \overline{b}) = \frac{\overline{a}^2 - \overline{b}^2}{2}$$
$$= \frac{(\overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{a} - \overline{b})}{2}$$
$$\text{i.e.} \quad \left(\overline{r} - \frac{\overline{a} + \overline{b}}{2}\right) \cdot (\overline{a} - \overline{b}) = 0$$

அதாவது $\overline{r} - \dfrac{\overline{a} + \overline{b}}{2}$ எனும் வெக்டர் $\overline{a} - \overline{b}$ என்ற வெக்டருக்குச் செங்குத்து. ஆனால் $\dfrac{\overline{a} + \overline{b}}{2}$ எனும் நிலைவெக்டருடைய புள்ளி ABயின் நடுப்புள்ளி C யாகும்.

$\therefore \left(\overline{r} - \dfrac{\overline{a} + \overline{b}}{2}\right)$ என்ற வெக்டர் $\overline{CP}$ என்ற வெக்டரைக் குறிக்கும். i.e. $\overline{CP}$, $\overline{AB}$க்குச் செங்குத்து. இது Pயின் ஏதோ

ஒரு நிலையில் நிறுவப்பட்டாலும், $AP = BP$ எனுமாறு அமையும் Pயின் எல்லா நிலைகளுக்கும் பொருந்தும். அதாவது Pயின் இயங்குவரை $\left(\bar{r} - \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\right)\right) \cdot (\bar{a}-\bar{b}) = 0$ என்ற, ABயின் மையப்புள்ளி வழியாக அதற்குச் செங்குத்தான தளமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3: ஒரு புள்ளி, கொடுக்கப்பட்ட மூன்று புள்ளி களிலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்குமாறு நகர்கிறது. அதன் இயங்கு வரை என்ன?

A, B, C என்பன கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் என்றும், $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ என்பன முறையே அவற்றின் நிலைவெக்டர்கள் எனவும் கொள்க. முந்திய எடுத்துக்காட்டில் கண்டதுபோல், நகரும் புள்ளியின் இயங்கு வரை ABக்குச் செங்குத்தாய் ABயின் நடுப்புள்ளி வழிச் செல்லும் தளமாகும்; அதேபோன்று BCக்குச் செங்குத்தாய், BCயின் நடுப் புள்ளி வழிச் செல்லும் தளத்திலும் அமையவேண்டும். எனவே இயங்குவரை அவ்விரண்டு தளங்களின் வெட்டுக்கோடாகும் (**line of intersection**). எனவே அக்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\left(r - \frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\right) \cdot (\bar{a}-\bar{b}) = 0 = \left(r - \frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}\right) \cdot (\bar{b}-\bar{c}).$$ இக்கோடு ABC என்ற முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையத்தின் வழிச் சென்று ABCயின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாயுமிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 4: ஒரு நான்முகியின் ஆறு விளிம்புகளில் (**edges**), ஒவ்வொன்றின் நடுப்புள்ளி வழியேயும், எதிர் விளிம்புக்குச் செங்குத்தாய்ச் செல்லும் ஆறுதளங்களும் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கும் என நிறுவுக.

A, B, C, D என்பன நான்முகியின் முனைகள் என்க. அதன் சராசரி மையத்தினை ஆதியாய்க்கொண்டு இவற்றின் நிலைவெக்டர்கள் $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ என்க.

$\therefore$ சராசரி மையத்தின் நிலைவெக்டர் $\dfrac{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}}{4} = 0$

i.e. $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d} = 0$. ......(1)

ABயின் நடுப்புள்ளி வழியே CDக்குச் செங்குத்தான தளத்தின் சமன்பாடு

$$\left(\bar{r} - \frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\right) \cdot (\bar{c}-\bar{d}) = 0$$

i.e. $\left(\bar{r} + \dfrac{\bar{c}+\bar{d}}{2}\right) \cdot (\bar{c}-\bar{d}) = 0$ [(1)ல் இருந்து

$$\text{i.e. } \bar{r}\cdot(\bar{c}-\bar{d})+\left(\frac{\bar{c}+\bar{d}}{2}\right)\cdot(\bar{c}-\bar{d})=0$$

$$\text{i.e. } \bar{r}\cdot\bar{c}+\frac{\bar{c}^2}{2}=\bar{r}\cdot\bar{d}+\frac{\bar{d}^2}{2}$$

$$\text{i.e. } 2\bar{r}\cdot\bar{c}+\bar{c}^2=2\bar{r}\cdot\bar{d}+\bar{d}^2$$

இருபுறமும் $\bar{r}^2$ஐக் கூட்டினால்,

$$\bar{r}^2+2\bar{r}\cdot\bar{c}+\bar{c}^2=\bar{r}^2+2\bar{r}\cdot\bar{d}+\bar{d}^2$$

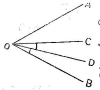
$$\text{i.e. } (\bar{r}+\bar{c})^2=(\bar{r}+\bar{d})^2$$

அதாவது இத்தளம், $-\bar{c}$, $-\bar{d}$ எனும் நிலைவெக்டர்கள் கொண்ட புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்தில் நகரும் புள்ளிகளின் இயங்கு வரையாயுள்ளது.

இதே போல், BCயின் நடுப்புள்ளி வழியே ADக்குச் செங்குத்தான தளம், $-\bar{d}$, $-\bar{a}$ களிலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ள புள்ளிகளின் இயங்கு தளமாகும்.

CDயின் நடுப்புள்ளி வழியே ABக்குச் செங்குத்தான தளம், $-\bar{a}$, $-\bar{b}$ யிலிருந்து சமதூரத்திலுள்ள புள்ளிகளின் இயங்கு தளமாகும். இவ்வாறே பார்த்துக் கொண்டு சென்றால், இத்தளங்கள் அனைத்திற்கும் ஒரு பொதுப் புள்ளி உண்டு என்பது புலனாகிறது. அதுதான் $-\bar{a}$, $-\bar{b}$, $-\bar{c}$, $-\bar{d}$ எனும் நிலைவெக்டர்களுடைய நான்கு புள்ளிகளிலிருந்தும் சமதூரத்தில் உள்ள புள்ளி. அது அந்நான்கு புள்ளிகளின் வழிச் செல்லும் கோளத்தின் மையமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 : ஒரு மும்முகக் கோணத்தில் (**trihedral angle**) ஒரு விளிம்பின் வழிச் செல்வதும் மற்ற இரு விளிம்புகளினிடைப்பட்ட கோணத்தை உட்புறமாய் இருசமக் கூறிடுவதுமான மூன்று தளங்களும் ஒரே அச்சினை உடைன (co-axal) எனக் காண்பி. அவ்வச்சின் சமன்பாடு என்ன?



படம் 74.

OA, OB, OC என்பவை மும்முகக் கோணத்தின் விளிம்புகள் என்க.

$\hat{a}$ $\hat{b}$ $\hat{c}$ என்பவை இத்திசைகளில் அமையும் ஓரலகு வெக்டர்கள் என்க.

OD, OE, OF என்பன முறையே $B\hat{O}C$, $C\hat{O}A$, $A\hat{O}B$ என்ற குறுங் கோணங்களின் இருசம வெட்டிகள் என்க.

எனவே $\overline{OD}$, $\hat{b}+\hat{c}$ என்ற வெக்டரின் திசையிலும்,

$\overline{OE}$, $\hat{c}+\hat{a}$ என்ற வெக்டரின் திசையிலும்,

$\overline{OF}$, $\hat{a}+\hat{b}$ என்ற வெக்டரின் திசையிலும் அமைகின்றன.

$\therefore$ OAD என்ற தளத்தின் சமன்பாடு $\bar{r}\cdot\hat{a}\times(\hat{b}+\hat{c})=0$

OBE என்ற தளத்தின் சமன்பாடு $\bar{r}\cdot\hat{b}\times(\hat{c}+\hat{a})=0$

OCF என்ற தளத்தின் சமன்பாடு $\bar{r}\cdot\hat{c}\times(\hat{a}+\hat{b})=0$

இம்மூன்று தளங்களுக்கும் பொதுவான புள்ளியாக O உள்ளது. எனவே இம்மூன்றும் ஓரச்சு உடையனவாளுல், இவற்றிற்கான செங்குத்துக்கள் ஒரே சமதளத்தில் அமையவேண்டும்.

அதாவது $\hat{b}\times(\hat{c}+\hat{a})$, $\hat{c}\times(\hat{a}+\hat{b})$, $\hat{a}\times(\hat{b}+\hat{c})$ மூன்றும் ஒரே தளத்தில் அமைய வேண்டும்.

ஆனல் $\hat{b}\times(\hat{c}+\hat{a})+\hat{c}\times(\hat{a}+\hat{b})+\hat{a}\times(\hat{b}+\hat{c})=0$

அதாவது ஒவ்வொன்றையும் மற்ற இரு வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்வாக எழுத இயலும். எனவே அம்மூன்றும் ஒரே தள அமைப்புடையனவாகும்.

மேலும் இத்தளங்களின் வெட்டுக் கோடு

$\{\hat{a}\times(\hat{b}+\hat{c})\}\times\{\hat{b}\times(\hat{c}+\hat{a})\}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாகும்.

அதாவது $(\hat{a}\times\hat{b}+\hat{a}\times\hat{c})\times(\hat{b}\times\hat{c}+\hat{b}\times\hat{a})$

$$= (\hat{a}\times\hat{b})\times(\hat{b}\times\hat{c})+(\hat{a}\times\hat{b})\times(\hat{b}\times\hat{a})+(\hat{a}\times\hat{c})\times(\hat{b}\times\hat{c})+(\hat{a}\times\hat{c})\times(\hat{b}\times\hat{a})$$

$$= [\hat{a}\ \hat{b}\ \hat{c}]\,\hat{b}-[\hat{a}\ \hat{b}\ \hat{b}]\,\hat{c}+0+[\hat{a}\ \hat{c}\ \hat{c}]\,\hat{b}-[\hat{a}\ \hat{c}\ \hat{b}]\,\hat{c}+[\hat{a}\ \hat{c}\ \hat{a}]\,\hat{b}-[\hat{a}\ \hat{c}\ \hat{b}]\,\hat{a}$$

$$= [\hat{a}\ \hat{b}\ \hat{c}]\,\hat{b}-0+0+0+[\hat{a}\ \hat{b}\ \hat{c}]\,\hat{c}+0+[\hat{a}\ \hat{b}\ \hat{c}]\,\hat{a}$$

$$= [\hat{a}\ \hat{b}\ \hat{c}]\{\hat{b}+\hat{c}+\hat{a}\}$$

எனவே $\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாக அந்நேர் கோடு உள்ளது. அக் கோட்டின்மீது Oவும் ஒரு புள்ளியாகையால், அக்கோடு $\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}$ என்ற வெக்டரின் திசையில் அமைகிறது; Oவின் வழிச் செல்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 6: OA, OB, OC எனும் மூன்று கோடுகளில், இரண்டிரண்டாய் எடுத்துக்கொண்டால், கிடைக்கப்பெறும் தளங்களில், Oவின் வழியாக, மூன்ருவது கோட்டிற்குச் செங்குத்துக் கோடுகள் வரைந்தால், அவை ஒரே சமதளத்தில் அமையும் என நிறுவுக.

OA, OB, OC என்பன மூன்று கோடுகள்; இவற்றின் வழி அமையும் வெக்டர்கள் $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ என்க.

OA, OBயினுல் உருவாக்கப்படும் தளத்தின் சமன்பாடு

$$\bar{r} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = 0$$

Oவின் வழிச் செல்வதும், OAB எனும் தளத்தில் உள்ளதுமான எந்த நேர்கோடும் $\bar{a} \times \bar{b}$க்குச் செங்குத்தாகும். இத்தளத்தில் OCக்குச் செங்குத்தான வெக்டர், $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$க்கு இணையாகும்.

∴ OCக்குச் செங்குத்தான கோட்டின் சமன்பாடு

$$\bar{r} = t\,(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} \text{ என அமையும்.}$$

இதேபோல் OBC எனும் தளத்தில் OAக்குச் செங்குத்தான கோடு $\bar{r} = s\,(\bar{b} \times \bar{c}) \times \bar{a}$ எனவும், OCA எனும் தளத்தில், OBக்குச் செங்குத்தான கோடு,

$$\bar{r} = p\,(\bar{c} \times \bar{a}) \times \bar{b} \text{ எனவும் அமையும்.}$$

ஆனல் $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} + (\bar{b} \times \bar{c}) \times \bar{a} + (\bar{c} \times \bar{a}) \times \bar{b} = 0$ ஆகையால், $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}, (\bar{b} \times \bar{c}) \times \bar{a}, (\bar{c} \times \bar{a}) \times \bar{b}$, என்பன ஒரே தள அமைப்புடையன. எனவே மூன்று கோடுகளும் ஒரே சம தளத்தில் அமைகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 7: $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ என்பன ஒரே சம தளத்திலில்லா மூன்று வெக்டர்களாயின், $\bar{r} \cdot \bar{a} = 1$, $\bar{r} \cdot \bar{b} = 1$, $\bar{r} \cdot \bar{c} = 1$ எனும் தளங்களின் வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ என்பன ஒரு தள அமைப்பில்லாதன. ஆகையால், $\bar{b} \times \bar{c}$, $\bar{c} \times \bar{a}$, $\bar{a} \times \bar{b}$யும் ஒரு தளத்திலமையா.

∴ மூன்று தளங்களின் வெட்டும் புள்ளியை $\bar{b} \times \bar{c}$, $\bar{c} \times \bar{a}$, $\bar{a} \times \bar{b}$, எனும் வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்வாக எழுத இயலும்.

வெட்டும் புள்ளி $l(\bar{b} \times \bar{c}) + m(\bar{c} \times \bar{a}) + n(\bar{a} \times \bar{b})$ என்க. இதில் வரும் l, m, n என்ற எண்கள் தளங்களின் சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்யும் வகையில் தேர்வு செய்யப்பட வேண்டியவையாகும்.

$\bar{r} \cdot \bar{a} = 1$ என்பதில் பிரதியிட்டால்,

$$\{ l\,(\bar{b} \times \bar{c}) + m\,(\bar{c} \times \bar{a}) + n\,(\bar{a} \times \bar{b}) \} \cdot \bar{a} = 1$$

i.e. $l\,[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}] = 1$

$$\therefore \quad l = \frac{1}{[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}]}$$

$$\text{இதேபோல்} \quad m = \frac{1}{[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}]}; \quad n = \frac{1}{[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}]}$$

$$\therefore \text{ வெட்டும் புள்ளி} = \frac{\bar{b} \times \bar{c} + \bar{c} \times \bar{a} + \bar{a} \times \bar{b}}{[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}]}$$

எடுத்துக்காட்டு 8: $\bar{r} \cdot (2, -3, -6) = 7$; $\bar{r} \cdot (6, 2, -9) = 5$ என்ற தளங்களுக்கிடைப்பட்ட கோணம் என்ன ?

தளங்களின் சமன்பாடுகளிலிருந்து அவற்றின் செங்குத்துக் கோடுகள் $2i-3j-6k$; $6i+2j-9k$ என்ற வெக்டர்களுக்கு இணை என்பது புலப்படும். எனவே செங்குத்துக் கோட்டின் வழியமையும் ஓரலகு வெக்டர்கள் $\frac{2i-3j-6k}{7}$, $\frac{6i+2j-9k}{11}$ ஆகும்.

எனவே தளங்களுக்கிடைப்பட்ட கோணம், அவற்றின் செங்குத்துக் கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட கோணத்திற்குச் சமம் என்பதால்,

$$\cos\theta = \frac{2i-3j-6k}{7} \cdot \frac{6i+2j-9k}{11}$$

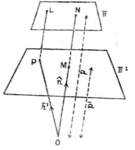
$$= \frac{12-6+54}{77}$$

$$= \tfrac{60}{77}$$

$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\left(\tfrac{60}{77}\right)$ என்பதுதான் தளங்களுக்கிடைப்பட்ட கோணமாகும்.

§ 5·15. கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு தளத்திற்குச் செங்குத்துத் தூரம் காணல்

P என்ற புள்ளியின் நிலைவெக்டர் r' என்க. இதன் செங்குத்துத் தூரம் $\bar{r} \cdot \hat{n} = p$ என்ற தளத்திலிருந்து எவ்வளவு எனக் காண வேண்டும். இச்செங்குத்துத் தூரம் $\hat{n}$ின் திசையிலேயே அளக்கப்படுகிறது.



படம் 75.

$\bar{r}\cdot\hat{n}=p$ என்ற தளம் π என்க. Pயின் வழியாக πக்கு இணையாக π' என்றொரு தளம் வரைக. படத்தில் OMN என்ற கோடு πக்கும் π'க்கும் செங்குத்தாக வரையப்பட்டுள்ளது. $OM=p'$; $ON=p$ என்பன π'க்கும் πக்கும் உள்ள செங்குத்துத் தூரங்கள் ஆகும்.

P, π'ல் ஒரு புள்ளி ஆகையால், Pயிலிருந்து πக்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரம் $PL=p-p'$.

ஆனால் π'ன் வெக்டர் சமன்பாடு $\bar{r}\cdot\hat{n}=p'$

இதில் $P(r')$ உள்ளதாகையால் $\bar{r}'\cdot\hat{n}=p'$

$$\therefore PL=p-p'$$
$$=p-\bar{r}'\cdot\hat{n}.$$

சமதளத்திற்கு எந்தப்பக்கத்தில் ஆதி உள்ளதோ அப்பக்கத்தில் அமைகின்ற புள்ளிகளுக்கு இத்தூரம் மிகையெண்ணும், மறுபுறம் அமையும் புள்ளிகளுக்குக் குறையெண்ணும் அமையும்.

§ 5·16. P_1, P_2 என்ற புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\bar{r}_1, \bar{r}_2$; $\bar{r}\cdot\bar{n}=q$ என்ற தளத்தின் ஒரு புறத்தில் அல்லது எதிர்ப்புறங்களில் இப்புள்ளிகள் அமைந்தால், $q-\bar{r}_1\cdot\bar{n}$; $q-\bar{r}_2\cdot\bar{n}$ என்பன முறையே ஒரே குறியீட்டுடன், அல்லது மாறுபட்ட குறியீடுகளுடன் விளங்கும் என நிறுவுதல்

P_1 P_2வைச் சேர்க்கும் கோடு கொடுக்கப்பட்ட $q-\bar{r}\cdot\bar{n}=0$ என்ற தளத்தை வெட்டுமானால், P_1ம் P_2ம் தளத்தின் எதிர்ப்பக்கங்களில் அமையும். அப்போது அத்தளத்தினை அக்கோடு வெட்டும்புள்ளி P_1 P_2வை உட்புறமாய் ஏதோ ஒரு விகிதத்தில் பிரிக்கும். அஃதின்றி P_1 P_2வைச் சேர்த்து நீட்டும் கோடுதான் தளத்தை வெட்டும் என்றால், புள்ளிகள் இரண்டும் தளத்தின் ஒரே பக்கத்தில் அமையும். மேலும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினைத் தளம் வெளிப்பக்கமாய் ஏதோ ஒரு விகிதத்தில் பிரிக்கும். எனவே P_1 P_2வைத் தளம் பிரிக்கின்ற முறையிலிருந்து புள்ளிகள் ஒரே பக்கமாய் அமைகின்றனவா, எதிரெதிர்ப் பக்கங்களில் அமைகின்றனவா எனக் கணிக்கலாம்.

$P_1(\bar{r}_1)$, $P_2(\bar{r}_2)$ஐத் தளம் $k:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கட்டும். பிரிக்கும் புள்ளியின் நிலைவெக்டர்,

$$=\frac{k\,\bar{r}_2+\bar{r}_1}{k+1};$$

இது $p-\bar{r}\cdot\bar{n}=0$ எனும் தளத்தில் அமைவதால்,

$$p-\left(\frac{k\,\bar{r}_2+\bar{r}_1}{k+1}\right)\cdot\bar{n}=0$$

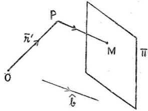
i.e. $kp-k\,(\bar{r}_2\cdot\bar{n})+p-(\bar{r}_1\cdot\bar{n})=0$

i.e. $k\,(p-\bar{r}_2\cdot\bar{n})+(p-\bar{r}_1\cdot\bar{n})=0.$

$$\therefore\quad k=-\left(\frac{p-\bar{r}_1\cdot\bar{n}}{p-\bar{r}_2\cdot n}\right)$$

எனவே, உட்புறமாய்ப் பிரிக்க, k மிகை யெண்ணாயிருக்க வேண்டும்; அதாவது $p-\bar{r}_1\cdot\bar{n}$ம், $p-\bar{r}_2\cdot\bar{n}$ம் எதிர்க் குறியீடுகளுடன் இருந்தால் P_1ம் P_2ம் எதிர்ப்பக்கங்களில் அமையும். வெளிப்பக்கமாய்ப் பிரிக்க, k குறையெண்ணாக இருக்கவேண்டும். அதாவது $p-\bar{r}_1\cdot\bar{n}$ம், $p-\bar{r}_2\cdot\bar{n}$ம் ஒரே குறியீட்டுடன் இருக்கவேண்டும். அதாவது புள்ளிகள் ஒரே பக்கமாய் அமையவேண்டுமாயின் $p-\bar{r}_1\cdot\bar{n}$ம், $p-\bar{r}_2\cdot\bar{n}$ம் ஒரே குறியீட்டுடன் விளங்கவேண்டும்.

§ 5·17. $\hat{b}$ எனும் ஓரலகு வெக்டரின் திசையில், $q-\bar{r}\cdot\bar{n}=0$ எனும் தளத்திலிருந்து $P\,(\bar{r}')$ எனும் புள்ளியின் தூரம் காணல்



படம் 76.

Pயின் நிலைவெக்டர் $\bar{r}'$. தளத்தின் சமன்பாடு $\bar{r}\cdot\bar{n}=q$. Pயின் வழி $\hat{b}$ எனும் ஓரலகு வெக்டருக்கு இணையான கோடு தளத்தினை Mல் வெட்டட்டும். $PM=d$ என்க.

$$\therefore\quad \overline{PM}=d\hat{b}$$

$$\overline{OM}=\overline{OP}+\overline{PM}$$

$$=\bar{r}'+d\hat{b}.$$

M தளத்தில் இருப்பதால் $\bar{r}\cdot\bar{n}=q$ என்பதை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.

அதாவது $(\bar{r}'+d\hat{b})\cdot\bar{n}=q$

i.e. $\bar{r}'\cdot\bar{n}+d\hat{b}\cdot\hat{n}=q$

$$\therefore\quad d=\frac{q-\bar{r}\cdot\bar{n}}{\hat{b}\cdot n}$$

குறிப்பு: $\hat{b}$ என்பது ஓரலகு வெக்டர் இல்லையாயின், $\hat{b}$யின் இடத்தில் $\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$ எழுதினால் தூரம் கிடைக்கும், அதாவது,

$$d=\frac{q-\bar{r}'\cdot n}{\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}\cdot\bar{n}}=\frac{|\bar{b}|\,(q-\bar{r}'\cdot n)}{\bar{b}\cdot\bar{n}}$$

எடுத்துக்காட்டு 1: $(1,-1,3)$ $(3,3,3)$ என்ற புள்ளிகள் $5x+2y-7z+9=0$ என்ற தளத்தின் இருபுறங்களிலும் அமைவதோடு, சமதளத்திலிருந்து சம தூரத்திலும் இருக்கின்றன என நிறுவுக.

$5x+2y-7z+9=0$ என்ற சமன்பாட்டை வெக்டர் சமன்பாடாக எழுதினால்,

$(xi+yj+zk)\cdot(5i+2j-7k)+9=0$ என்றாகும். இதனைச் செங்குத்துக் கோட்டமைப்பில் எழுத

$$(xi+yi+zk)\cdot\frac{(5i+2j-7k)}{\sqrt{78}}+\frac{9}{\sqrt{78}}=0$$

$\therefore$ $i+(-j)+3k$ அதாவது $(1,-1,3)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து செங்குத்துத்தூரம்

$$=(i-j+3k)\cdot\frac{(5i+2j-7k)}{\sqrt{78}}+\frac{9}{\sqrt{78}}$$

$$=\frac{5-2-21}{\sqrt{78}}+\frac{9}{\sqrt{78}}$$

$$=-\frac{9}{\sqrt{78}}$$

இதேபோன்று $(3,\ 3,\ 3)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து செங்குத்துத் தூரம்

$$=(3i+3j+3k)\cdot\frac{(5i+2j-7k)}{\sqrt{78}}+\frac{9}{\sqrt{78}}$$

$$=\frac{15+6-21}{\sqrt{78}}+\frac{9}{\sqrt{78}}$$

$= \frac{9}{\sqrt{78}}$ ஆகும்.

எனவே இவ்விரண்டு புள்ளிகளும் தளத்திலிருந்து சமதூரத்தில் உள்ளன. ஆனால் குறியீட்டில் மாறுபடுகின்றன. எனவே இவ்விரண்டு புள்ளிகளும் தளத்தின் இருபுறங்களிலுமாக அமைகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 2: $A(1, 2, 3)$ $B(3, 4, 2)$ $C(-3, 1, 4)$ என்ற புள்ளிகளின் வழிச்செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு என்ன?

ஆய ஆதியை வெக்டர் ஆதியாகக் கொண்டால்,

Aயின் நிலைவெக்டர் $= i+2j+3k$;

Bயின் நிலைவெக்டர் $= 3i+4j+2k$;

Cயின் நிலைவெக்டர் $= -3i+j+4k$ ஆகும்.

தளத்திலுள்ள ஏதோ ஒருபுள்ளி $P(x, y, z)$ன் நிலைவெக்டர்

$$= xi+yj+zk$$

$$\therefore \overline{AP} = xi+yj+zk-(i+2j+3k)$$

$$= (x-1)\,i+(y-2)\,j+(z-3)k$$

$$\overline{AB} = 2i+2j-k$$

$$\overline{BC} = -6i-3j+2k$$

$\therefore$ சமதளம் $ABCD$யின் சமன்பாடு $\overline{AP} \cdot \overline{AB} \times \overline{BC} = 0$

$$\text{i.e.} \begin{vmatrix} x-1, & y-2, & z-3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{i.e. } x+2y+6z = 23.$$

எடுத்துக்காட்டு 3: $A\,(1, -2, -3)$ என்ற புள்ளி வழியே $(2, -1, 3)$ $(2, 3, -6)$ என்ற வெக்டர்களுக்கு இணையான தளத்தின் சமன்பாடு என்ன?

$P\,(x, y, z)$ என்பது தளத்தில் ஒரு புள்ளியானால்,

$\overline{AP}$, $(2, -1, 3)$ $(2, 3, -6)$ எனும் வெக்டர்கள் ஒரேதள அமைவுடையன.

$$\therefore \overline{AP} \cdot (2, -1, 3) \times (2, 3, -6) = 0$$

$$\text{i.e.} \begin{vmatrix} x-1, & y+2, & z+3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{i.e. } 3x-18y-8z = 63.$$

எடுத்துக்காட்டு 4 : $A(2, 1, -3)$ $B(2, 3, -5)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச்செல்வதும், $(3, -2, 4)$ என்ற வெக்டருக்கு இணையானதுமான சமதளத்தின் சமன்பாடு என்ன?

$P(x, y, z)$ என்பது சமதளத்தில் ஒரு புள்ளி என்க.

$\therefore$ $\overline{AP}$, $\overline{AB}$, $(3, -2, 4)$ எனும் வெக்டர்கள் ஒருதள அமைவுடையன.

$$\overline{AP} = (x-2)\,i+(y-1)\,j+(z+3)k\,;$$

$$\overline{AB} = 2j-2k\,;$$

$\therefore$ தளத்தின் சமன்பாடு $\overline{AP}\cdot\overline{AB}\times(3, -2, 4) = 0$

$$\text{i.e.}\quad \begin{vmatrix} x-2, & y-1, & z+3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

i.e. $2x-3y-3z-10 = 0.$

§ 5·18. $\bar{a}$ எனும் புள்ளி வழியேயும் $\bar{r}\cdot\bar{n}_1 = q_1$; $\bar{r}\cdot\bar{n}_2 = q_2$ என்ற இரு தளங்களின் வெட்டுக்கோட்டின் வழியேயும் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு காணுதல்

$\bar{r}\cdot\bar{n}_1-q_1=0$; $\bar{r}\cdot\bar{n}_2-q_2=0$ ......(1)

என்ற தளங்களில் வெட்டுக்கோட்டின் வழிச்செல்லும் கோடு

$(\bar{r}\cdot\bar{n}_1-q_1)+\lambda\,(\bar{r}\cdot\bar{n}_2-q_2) = 0$ ......(2)

என்ற வடிவில் இருக்கும். ஏனெனில் (1)ல் உள்ள இரண்டு சமன்பாடுகளையும் நிறைவு செய்யும் புள்ளிகள், அதாவது இரண்டு தளங்களின் வெட்டுக்கோட்டில் உள்ள புள்ளிகள் λன் எம்மதிப்புக்கும் (2)ஐயும் நிறைவு செய்யும். மேலும் (2) ஒரு தளத்தின் சமன்பாடாகும். இத்தளம் $\bar{a}$யின் வழிச்செல்வதால்,

$$\bar{a}\cdot\bar{n}_1-q_1+\lambda\,(\bar{a}\cdot\bar{n}_2-q_2) = 0$$

$$\text{i.e.}\ \lambda = -\frac{(\bar{a}\cdot\bar{n}_1-q_1)}{(\bar{a}\cdot\bar{n}_2-q_2)}$$

λன் மதிப்பை (2)ல் பிரதியிட்டால் வேண்டப்படும் தளத்தின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு : $(1, 2, -3)$ என்ற புள்ளி வழியேயும், $4x+2y-3z-11=0$, $2x-y+3z-5=0$ என்ற தளங்களின் வெட்டுக்கோட்டின் வழியேயும் வரையப்படும் தளத்தின் சமன்பாடு என்ன?

$4x+2y-3z-11 = 0$ என்ற சமதளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு

$(xi+yj+zk)\cdot(4i+2j-3k)-11 = 0$ (1)

இதனைச் செங்குத்துக் கோட்டமைப்பில் எழுதினால்,

$$(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})\cdot\frac{(4\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k})}{\sqrt{29}}-\frac{11}{\sqrt{29}}=0.$$

இதேபோல் $2x-y+3z-5=0$ எனும் தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு

$$(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})\cdot(2\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k})-5=0 \qquad (2)$$

(1), (2)ன் வெட்டுக் கோட்டின் வழிச்செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு

$$\{(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})\cdot(4\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k})-11\}+\lambda\{(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})\cdot(2\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k})-5\}=0 \qquad (3)$$

என்ற வடிவில் இருக்கும்.

ஆனால் (1, 2, −3) என்ற புள்ளி வழியே இத்தளம் செல்வதால், $\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k}$ என்ற நிலைவெக்டர் (3)ஐ நிறைவு செய்யவேண்டும்.

i.e. $\{(\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k})\cdot(4\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k})-11\}+\lambda\{(\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k})\cdot(2\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k})-5\}=0$

i.e. $\{(4+4+9)-11\}+\lambda\{2-2-9-5\}=0$

i.e. $6-14\lambda=0$

$\therefore\ \lambda=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$

$\therefore$ வேண்டப்படும் தளத்தின் சமன்பாடு

$$\{(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})\cdot(4\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k})-11\}+\tfrac{3}{7}\{(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})\cdot(2\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k})-5\}=0$$

அதாவது $4x+2y-3z-11+\frac{3}{7}\{2x-y+3z-5\}=0$

i.e. $28x+14y-21z-77+6x-3y+9z-15=0$

i.e. $34x+11y-12z-92=0.$

§ 5·19. இரு தளங்களின் வெட்டுக் கோட்டின் சமன்பாடு காணுதல்

$ABCD$, $ADEF$ என்ற இரு சமதளங்கள் AD என்ற நேர்கோட்டில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. அவற்றின் சமன்பாடுகள்

$$\bar{r}\cdot\bar{n}_1=p_1 \qquad (1)$$
$$\bar{r}\cdot\bar{n}_2=p_2 \qquad (2)$$

எனக் கொள்க.

AD என்ற வெட்டுக்கோடு இரு தளங்களிலும் அமைவதால் $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ இரண்டிற்கும் அது செங்குத்தாகும்.

$\bar{n}_1\times\bar{n}_2$ என்ற வெக்டர் $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ இரண்டிற்கும் செங்குத்து ஆகையால் $\overline{AD}$, $\bar{n}_1\times\bar{n}_2$க்கு இணையாகும்.

மேலும் ADயின் சமன்பாடு காணப்பட ADயின் மேல் உள்ள ஒரு புள்ளியின் நிலைவெக்டர் காணப்பட வேண்டும்.

வெக்டர் ஆதி Oவிலிருந்து ADக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடி P என்க. அதன் நிலைவெக்டர் $\overline{p}$ என்க. இச்செங்குத்துக் கோடு, சமதளங்களின் செங்குத்து வெக்டர்கள் $\overline{n}_1$ $\overline{n}_2$வால் நிர்ணயிக்கப்பெறும் சம தளத்திற்கு இணையாகும்.

$\therefore\ \overline{p} = l\overline{n}_1 + m\overline{n}_2$ என எழுதலாம்; l, m என்பன ஏதோ இரு தகுந்த திசையிலிகள்.

இப்புள்ளி P இரு தளங்களிலும் அமைவதால், $\overline{p}\cdot\overline{n}_1 = p_1$, $\overline{p}\cdot\overline{n}_2 = p_2$ என இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $(l\overline{n}_1 + m\overline{n}_2)\cdot\overline{n}_1 = p_1$

i.e. $l\overline{n}_1^2 + m\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2 = p_1$ ......(3)

இதேபோல் $l\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2 + m\overline{n}_2^2 = p_2$ ......(4)

(3)ஐ $\overline{n}_2^2$ ஆலும், (4)ஐ $\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2$ ஆலும் பெருக்கிக் கழிக்க,

$$l\,[\,\overline{n}_1^2\,\overline{n}_2^2 - (\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2)^2\,] = p_1\overline{n}_2^2 - p_2\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2$$

$$\therefore\ l = \frac{p_1\overline{n}_2^2 - p_2\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2}{\overline{n}_1^2\overline{n}_2^2 - (\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2)^2}$$

$$\text{இதேபோன்று } m = \frac{p_2\overline{n}_1^2 - p_1\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2}{\overline{n}_1^2\overline{n}_2^2 - (\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2)^2}$$

எனவே Pயின் நிலைவெக்டர் தீர்மானிக்கப்படுகிறது.

$\therefore$ வெட்டுக் கோட்டின் சமன்பாடு

$\overline{r} = \overline{p} + t\,(\overline{n}_1\times\overline{n}_2)$; t என்பது துணை மாறியாகப் பயன்படும் திசையிலி.

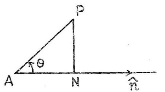
i.e. $\overline{r} = l\overline{n}_1 + m\overline{n}_2 + t\,(\overline{n}_1\times\overline{n}_2)$.

இது துணையலகுச் சமன்பாடு (Parametric Equation) எனப்படும். இஃதன்றி, வெட்டுக்கோட்டில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\overline{p}$ தெரிந்திருக்குமானால், அக்கோட்டின் சமன்பாடு

$(\overline{r} - \overline{p})\times(\overline{n}_1\times\overline{n}_2) = 0$ என்பதாகும்.

§ 5·20. ஒரு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து ஒரு நேர் கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்

$A\,(\overline{a})$ என்ற புள்ளி வழியே $\hat{n}$ என்ற ஓரலகு வெக்டரின் திசையில் உள்ள நேர்கோட்டிற்கு $P\,(\overline{p})$ என்ற புள்ளியிலிருந்து PN என்ற செங்குத்துத் தூரம் காணவேண்டும்.



படம் 77.

AN என்ற நேர்கோட்டின் சமன்பாடு
$(\bar{r}-\bar{a})\times\hat{n} = 0$ ஆகும்.

$\hat{n}\times\overline{AP}$ என்ற வெக்டரை எடுத்துக்கொள்வோம். இதன் எண்ணளவு

$= 1\ AP\sin\theta$ ஆகும். $\{\because\ \hat{\theta} = P\hat{A}N\}$
$= PN$ $\{\triangle\ PAN$ல் இருந்து$\}$

$\therefore$ செங்குத்துத் தூரம் $\bar{n}\times\overline{AP}$ன் எண்ணளவாகும்.
i.e. $|\bar{n}\times(\bar{p}-\bar{a})|$ அல்லது $|(\bar{p}-\bar{a})\times\bar{n}|$

அதாவது அக்கோட்டின் சமன்பாட்டில் $\bar{r}$க்குப்பதில் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியின் நிலைவெக்டரைப் பிரதியிடுவதால் கிடைக்கும் வெக்டரின் எண்ணளவு, அப்புள்ளியின் செங்குத்துத்தூரமாகும்.

செங்குத்துக் கோட்டின் அடியின் நிலைவெக்டர் காணுதல் :

$$AN = \overline{AP}\cdot\bar{n}$$
$$= (\bar{p}-\bar{a})\cdot\bar{n}$$
$$\therefore\ \overline{AN} = \{(\bar{p}-\bar{a})\cdot\bar{n}\}\,\bar{n}$$

$\therefore$ Nன் நிலைவெக்டர் $=$ Aயின் நிலைவெக்டர் $+\overline{AN}$.
$$= \bar{a}+\{(\bar{p}-\bar{a})\cdot\bar{n}\}\bar{n}.$$

§ 5·21. இருகோடுகள் வெட்டுவதற்கான நியதி

கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $\bar{r} = \bar{a}+t\bar{b}$
$\bar{r} = \bar{c}+s\bar{d}$ என்க.

சமன்பாடுகளிலிருந்து அவை முறையே $\bar{a}$ வழியே $\bar{b}$க்கு இணையாகவும், $\bar{c}$ வழியே $\bar{d}$க்கு இணையாகவும் அமைகின்றன என்று தெரிகிறது.

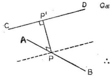
இவ்விரண்டு கோடுகளும் வெட்டவேண்டுமானல் அவை ஒரே தளத்தில் அமையவேண்டும். அதாவது, $\overline{AC}$, $\overline{b}$, $\overline{d}$ மூன்றும் ஒரே தளத்தில் அமையவேண்டும். இதற்கான நியதி $\overline{AC}\cdot\overline{b}\times\overline{d}=0$ என்பதாகும்.

i.e. $(\overline{c}-\overline{a})\cdot\overline{b}\times\overline{d}=0.$

i.e. $\overline{c}\cdot\overline{b}\times\overline{d}=\overline{a}\cdot\overline{b}\times\overline{d}$

i.e. $[\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{d}]=[\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{d}]$

§ 5·22. வெட்டிக் கொள்ளாத இரு நேர்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மிகக் குறைந்த தூரம் (Shortest distance)



படம் 78.

AB, CD என்பன இரண்டு வெட்டிக் கொள்ளாத நேர்கோடுகள்.

ABயின் சமன்பாடு $\overline{r}=\overline{a}+t\overline{b}$ எனவும்,

CDயின் சமன்பாடு $\overline{r}=\overline{c}+s\overline{d}$ எனவும் கொள்க.

∴ ABயு CDயும் முறையே $\overline{b}$, $\overline{d}$ களுக்கு இணையானவை.

∴ $\overline{b}\times\overline{d}$ என்ற வெக்டர் ABக்கும், CDக்கும் செங்குத்தாகும்.

∴ மிகக் குறைந்த தூரம் pp', $\overline{b}\times\overline{d}$க்கு இணையாகும்.

மேலும் இரு கோடுகளுக் கிடைப்பட்ட மிகக் குறைந்த தூரம் என்பது pp'ன் மேல் ACயின் வீழலாகும்.

i.e. மிகக் குறைந்த தூரம் $=(\overline{c}-\overline{a})\cdot\dfrac{\overline{b}\times\overline{d}}{|\overline{b}\times\overline{d}|}$

$$=\frac{[\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{d}]-[\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{d}]}{|\overline{b}\times\overline{d}|}$$

§ 5·23. மிகக்குறைந்த தூரக்கோட்டின்சமன்பாடு காணுதல்

மிகக் குறைந்த தூரக் கோடு PP', என்பது, APP', CPP' எனும் இரு தளங்களின் வெட்டுக் கோடு ஆகும்.

∴ PP'ல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $R(\overline{r})$ என எடுத்துக் கொண்டால், $\overline{r}-\overline{a}$, $\overline{b}\times\overline{d}$, $\overline{b}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒரு தளத்திலும், $\overline{r}-\overline{c}$; $\overline{b}\times\overline{d}$, $\overline{d}$ என்ற வெக்டர்கள் இன்னொரு தளத்திலும், அமைகின்றன. இவ்விரண்டின் வெட்டுக் கோடே PP' ஆகும்.

APP'ன் சமன்பாடு $(\overline{r}-\overline{a})\cdot\overline{b}\times(\overline{b}\times\overline{d})=0$!

i.e. $[\overline{r}-\overline{a}, \overline{b}, \overline{b}\times\overline{d}]=0$

Cpp'ன் சமன்பாடு $[\overline{r}-\overline{c}, \overline{d}, \overline{b}\times\overline{d}]=0$

இவ்விரண்டின் வெட்டுக் கோடு PP' ஆகும்.

§ 5·24. வெட்டிக் கொள்ளாத இரு நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளை மிக எளிய முறையில் எழுத

மிகக் குறைந்த தூரக் கோட்டின் நடுப்புள்ளியை வெக்டர் ஆதியாகக் கொண்டால், P, P'ன் நிலைவெக்டர்களை முறையே $\overline{l}$, $-\overline{l}$ என எழுதலாம். ($2l$ என்பது மிகக் குறைந்த தூரம் என எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது)

எனவே ABயின் சமன்பாடு $\overline{r} = \overline{l}+t\overline{b}$

CDயின் சமன்பாடு $\overline{r} = -\overline{l}+s\overline{d}$

மேலும் $PP' = 2l = \dfrac{[2\overline{l}\ \overline{b}\ \overline{d}]}{|\overline{b}\times\overline{d}|}$

எடுத்துக்காட்டு 1: $3x-y+z-12 = 0$; $x+4y-2z+5 = 0$ என்ற தளங்களின் வெட்டுக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க. இக்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாயும் $(1, 2, -1)$ என்ற புள்ளி வழியேயும் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு என்ன?

$3x-y+z=12$ என்ற தளத்தின் வெக்டர் சமன்பாடு

$(xi+yj+zk)\,.\,(3i-j+k)-12=0$ ஆகும்.

அதேபோல் $x+4y-2z+5=0$வின் வெக்டர் சமன்பாடு

$(xi+yj+zk)\,.\,(i+4j-2k)+5=0$

இத்தளங்கள் முறையே $3i-j+k$; $i+4j-2k$ எனும் செங்குத்து வெக்டர்கள் உடையன.

எனவே தளங்களின் வெட்டுக்கோடு இவ்விரு வெக்டர்களுக்கும் செங்குத்து. அதனால் $(3i-j+k)\times(i+4j-2k)$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாகும்.

அதாவது $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -2i+7j+13k$; என்ற

வெக்டருக்கு இணையாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட தளங்களின் வெட்டுக்கோடு YOZ தளத்தினை வெட்டும் புள்ளியைக் காண, $x=0$ என்று தளங்களின் சமன்பாட்டில் பிரதியிடவேண்டும்.

i.e. $-y+z = 12$

$4y-2z = -5$

i.e. $-2y+2z = 24$

கூட்ட $2y = 19$

$y = \frac{19}{2}$

$\therefore \quad z = \frac{43}{2}$

$x = 0.$

$\therefore$ $(0, \frac{19}{2}, \frac{43}{2})$ என்ற புள்ளி இக்கோட்டின்மீது அமைகிறது.

$\therefore$ அக்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\bar{r} = (\tfrac{19}{2}j+\tfrac{43}{2}k)+t\,(-2i+7j+13k)$$

இக்கோட்டிற்குச் செங்குத்தான தளத்தின் சமன்பாடு

$(xi+yj+zk)\,.\,(-2i+7j+13k)+\lambda = 0$ என அமையும். இதில் வரும் λ என்ற எண், இத்தளம் $i+2j-k$ என்ற புள்ளிவழிச் செல்கிறது என்பதைக் கொண்டு நிர்ணயிக்கப்பட வேண்டியதாகும்.

அதாவது $(i+2j-k)\,.\,(-2i+7j+13k)+\lambda = 0$

i.e. $-2+14-13+\lambda = 0$

$\lambda = 1$

$\therefore$ கேட்கப்பட்ட தளம்

$(xi+yj+zk)\,.\,(-2i+7j+13k)+1 = 0$

அல்லது $-2x+7y+13z+1 = 0$ என்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : $\bar{r} = \bar{a}+t\,(\bar{b}+\bar{c})$; $\bar{r} = \bar{b}+s\,(\bar{c}+\bar{a})$ என்ற நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் என நிறுவி, வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

இவ்விரு கோடுகளும் வெட்டிக்கொண்டால், வெட்டுப் புள்ளியின் நிலைவெக்டர் இரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்தும் ஒரே மதிப்பாகக் கிடைக்கவேண்டும்.

$\therefore\ \bar{a}+t\,(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{b}+s\,(\bar{c}+\bar{a})$

i.e. $\bar{a}+t\,\bar{b}+t\,\bar{c} = s\,\bar{a}+\bar{b}+s\,\bar{c}$

ஒத்த வெக்டர்களின் கெழுக்களைச் சமப்படுத்திஞல்,

$s=1;\ t=1;\ s=t$

$\therefore$ வெட்டுப்புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$.

மாற்றுவழி : $\bar{r} = \bar{a}+t\,(\bar{b}+\bar{c})$ என்ற நேர்கோடு $\bar{b}+\bar{c}$க்கு இணையாக $A\,(\bar{a})$ என்ற புள்ளி வழியே செல்கிறது.

$\overline{r}=\overline{b}+s\,(\overline{c}+\overline{a})$ என்ற நேர்கோடு $\overline{c}+\overline{a}$க்கு இணையாக $B\,(\overline{b})$ என்ற புள்ளிவழிச் செல்கிறது. எனவே $\overline{AB}$, $\overline{b}+\overline{c}$, $\overline{c}+\overline{a}$ என்ற வெக்டர்கள் ஒருதளத்தில் இருந்தால், இருகோடுகளும் வெட்டும்.

அதாவது $(\overline{b}-\overline{a})\cdot(\overline{b}+\overline{c})\times(\overline{c}+\overline{a})=0$ என இருக்கவேண்டும்.

i.e. $(\overline{b}-\overline{a})\cdot\{\overline{b}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{a}+\overline{c}\times\overline{c}+\overline{c}\times\overline{a}\}=0$

i.e. $\overline{b}\cdot\overline{c}\times\overline{a}-\overline{a}\cdot\overline{b}\times\overline{c}=0.$

இது உண்மை. ஆகையால் $\overline{AB}$, $\overline{b}+\overline{c}$, $\overline{c}+\overline{a}$ ஆகியன ஒரே தளத்தில் உள்ளன. எனவே கோடுகள் வெட்டும். வெட்டுப்புள்ளியின் நிலைவெக்டர் இருகோடுகளிலும் சம மதிப்புடையதாகக் கிடைக்கும்.

$$\therefore\ \overline{a}+t\,(\overline{b}+\overline{c})=\overline{b}+s\,(\overline{c}+\overline{a})$$

என முன்பு காட்டியவாறு $t=s=1$ என நிறுவலாம்.

$\therefore$ வெட்டும்புள்ளி $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : A, B, C, D என்ற நான்கு புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $3i+2j+k$; $4i+5j+5k$; $4i+2j-2k$; $6i+5j-k$. ABயும் CDயும் வெட்டிக்கொள்ளுமா எனக் கண்டுபிடி. அப்படி வெட்டுமாயின் வெட்டுப்புள்ளியைக் காண்க. [B. Sc. ஏப். 68]

Aயின் நிலைவெக்டர் $3i+2j+k$

Bயின் நிலைவெக்டர் $4i+5j+5k$

Cயின் நிலைவெக்டர் $4i+2j-2k$

Dயின் நிலைவெக்டர் $6i+5j-k$

ABயின் சமன்பாடு

$$\overline{r}=(3i+2j+k)+t\,(4i+5j+5k-3i-2j-k)$$
$$=3i+2j+k+t\,(i+3j+4k)$$

CDயின் சமன்பாடு

$$\overline{r}=4i+2j-2k+s\,(6i+5j-k-4i-2j+2k)$$
$$=4i+2j-2k+s\,(2i+3j+k)$$

இரு கோடுகளும் சந்தித்தால், சந்திப்புப் புள்ளியின் நிலைவெக்டர் இரு சமன்பாடுகளிலிருந்தும் ஒரே மதிப்பாகப் பெறப்படும். எனவே

$$3i+2j+k+t\,(i+3j+4k)=4i+2j-2k+s\,(2i+3j+k)$$

i.e. $(3+t)i+(2+3t)j+(1+4t)k=(4+2s)i+(2+3s)j+(-2+s)k$

ஒத்த வெக்டர்களின் கெழுக்களைச் சமப்படுத்தினால்,

$3+t=4+2s$; i.e. $t-2s=1$ ......(1)

$2+3t=2+3s$; i.e. $3t-3s=0$ i.e. $t=s$ ......(2)

$1+4t=-2+s$; $4t-s=-3$ ......(3)

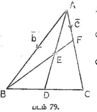
(1), (2)ல் இருந்து,

$$-s = 1; \qquad s = -1;$$

$$\therefore \quad t = -1$$

∴ வெட்டுப்புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $= 2i - j - 3k$, வெட்டுப்புள்ளி காண இயலுவதால், இவ்விரு கோடுகளும் வெட்டக்கூடியவை என்பதும் நிறுவப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4: ABC எனும் முக்கோணத்தின் நடுக்கோடாகிய ADயின் நடுப்புள்ளி E, Bக்குச் சேர்க்கப்பட்டு, BE நீட்டப்படுகிறது. அது ACயை Fல் வெட்டினால் $AF = \frac{1}{3} AC$, $EF = \frac{1}{4} BF$ என வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.



படம் 79.

Aயினை வெக்டர் ஆதியாகக் கொண்டு B, Cயின் நிலைவெக்டர் $\bar{b}$, $\bar{c}$ என்க.

∴ BCயின் நடுப்புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}$.

∴ ADயின் நடுப்புள்ளி Eயின் நிலை வெக்டர் $= \frac{\bar{b}+\bar{c}}{4}$

$$\therefore \quad \overline{BE} = \frac{\bar{b}+\bar{c}}{4} - \bar{b} = \frac{\bar{c}-3\bar{b}}{4}$$

∴ BEயின் சமன்பாடு

$$\bar{r} = \bar{b} + t\left(\frac{\bar{c}-3\bar{b}}{4}\right)$$

ACயின் சமன்பாடு $\bar{r} = s\bar{c}$

∴ இரண்டின் வெட்டுப்புள்ளி Fன் நிலைவெக்டர் $t = t_1$, $s = s_1$ எனும் மதிப்புகளுக்குக் கிடைக்கும் என்க.

$$\therefore \quad \bar{b} + t_1\left(\frac{\bar{c}-3\bar{b}}{4}\right) = s_1\bar{c}$$

$$\therefore \left(1 - \frac{3t_1}{4}\right)\bar{b} + t_1 \frac{\bar{c}}{4} = s_1\bar{c}$$

$$\therefore \; s_1 = \frac{t_1}{4}, \quad 1 - \frac{3t_1}{4} = 0$$

$$\therefore \; t_1 = \tfrac{4}{3}$$

மேலும் $s_1 = \frac{1}{3}$.

$$\therefore \; F\text{ன் நிலைவெக்டர் } \overline{AF} = \tfrac{1}{3}\,\bar{c}$$

$$= \tfrac{1}{3}\,\overline{AC}$$

மேலும் $\overline{EF} = \overline{AF} - \overline{AE} = \frac{\overline{c}}{3} - \frac{\overline{b}+\overline{c}}{4}$

$$= \frac{4\overline{c} - 3\overline{b} - 3\overline{c}}{12}$$

$$= \frac{\overline{c} - 3\overline{b}}{12}$$

$$\overline{BF} = \overline{AF} - \overline{AB} = \frac{\overline{c}}{3} - \overline{b} = \frac{\overline{c} - 3\overline{b}}{3}$$

$$\therefore\ \overline{EF} = \tfrac{1}{4}\,\overline{BF}.$$

எடுத்துக்காட்டு 5 : $A\ (4, -2, 3)$ என்ற புள்ளிவழியே $5i - 3j + k$; $3i - 2j + k$ என்ற வெக்டர்களுக்கு இணையான தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

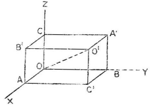
வேண்டப்படும் தளத்தின் சமன்பாடு

$\overline{r} = \overline{a} + t\overline{b} + s\overline{c}$. என்ற வடிவில் இருக்கும். (அதாவது, $\overline{a}$ எனும் நிலைவெக்டருடைய புள்ளி வழியே, $\overline{b}$, $\overline{c}$ எனும் வெக்டர்களுக்கு இணையான தளத்தின் சமன்பாடாகும்)

i.e. $\overline{r} = (4i - 2j + 3k) + t\ (5i - 3j + k) + s\ (3i - 2j + k)$

$$= i\ (4 + 5t + 3s) + j\ (-2 - 3t - 2s) + k\ (3 + t + s)$$

எடுத்துக்காட்டு 6 : $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ எனும் நீளமுள்ள விளிம்புகளை உடைய செவ்வக இணைகரத் திண்மத்தின் (Rectangular parallelopiped) மூலைவிட்டம் ஒன்றினுக்கும், அதனைச் சந்திக்காத விளிம்பு



படம் 80.

களுக்கும் இடைப்பட்ட மிகக் குறுகிய தூரங்கள் (Shortest distances) $\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$, $\frac{ca}{\sqrt{c^2+a^2}}$, $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ என நிறுவுக.

செவ்வக இணைகரத் திண்மத்தின் ஒரு முனையிற் கூடும் விளிம்புகள் OA, OB, OC எனவும், அவற்றின் வழியமையும் ஓரலகு வெக்டர்கள் முறையே i, j, k எனவும் கொள்க. $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ எனில் Aயின் நிலைவெக்டர் ai எனவும், Bயின் நிலைவெக்டர் bj எனவும் Cயின் நிலைவெக்டர் ck எனவும் அமையும்.

O, A, B, C என்ற முனைகளின் எதிர் முனைகள் முறையே O', A', B', C' என்க.

$$\therefore\ O'\text{ன் நிலைவெக்டர்} = \overline{OA} + \overline{AC'} + \overline{C'O'}$$
$$= \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$$
$$= ai + bj + ck.$$

முதலில் OO'க்கும், CB' என்ற விளிம்புக்கும் இடையே உள்ள மிகக் குறைந்த தூரத்தினைக் காண்போம்.

$$OO'\text{ன் சமன்பாடு } \bar{r} = t\,(ai + bj + ck)$$
$$CB'\text{ன் சமன்பாடு } \bar{r} = ck + si.$$

$\therefore$ இரண்டிற்கு மிடைப்பட்ட மிகக் குறைந்த தூரம்

$$= \overline{OC} \cdot \frac{(ai+bj+ck) \times i}{|(ai+bj+ck) \times i|}$$
$$= ck \cdot \frac{(cj-bk)}{|cj-bk|}$$
$$= \frac{-bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

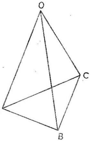
$$\text{குறியீட்டை விடுத்து மிகக் குறைந்த தூரம்} = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

இதுபோன்றே OO'க்கும் BA' இடைப்பட்ட மிகக்குறைந்த தூரம் $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ எனவும், $C'A'$க்கும் OO'க்கும் இடைப்பட்ட மிகக்குறைந்த தூரம் $\frac{ca}{\sqrt{c^2+a^2}}$ எனவும் நிறுவலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7 : ஓர் ஒழுங்கு நான்முகியின் ஒரு ஜோடி எதிர்ப்பக்கங்களுக்கு இடைப்பட்ட மிகக் குறைந்த தூரம், அந்த

நான்முகியின் ஒரு விளிம்பைப் பக்கமாகவுடைய சதுரத்தின் மூலை விட்டத்தில் பாதி என நிறுவுக.

$OABC$ ஓர் ஒழுங்கு நான்முகி விளிம்புகளின் நீளம் l என்க. Oவினை ஆதியாகக்கொண்டு, A, B, Cகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ என்க. அப்படியானால் $|\overline{a}| = |\overline{b}| = |\overline{c}| = l$.



படம் 81.

ABக்கும் OCக்கும் குத்தாக உள்ள திசையில் ஓரலகு வெக்டர்

$$\hat{n} = \frac{\overline{AB}\times\overline{OC}}{|\overline{AB}\times\overline{OC}|} = \frac{(\overline{b}-\overline{a})\times\overline{c}}{|(\overline{b}-\overline{a})\times\overline{c}|}$$

$\therefore$ ABக்கும் OCக்கும் இடைப்பட்ட மிகக்குறைந்த தூரம்

$$d = \overline{OA}\cdot\hat{n} = \frac{\overline{a}\cdot(\overline{b}-\overline{a})\times\overline{c}}{|(\overline{b}-\overline{a})\times\overline{c}|}$$

$$= \frac{[\overline{a}\;\overline{b}\;\overline{c}]}{|(\overline{b}-\overline{a})\times\overline{c}|}$$

மேலும் $[\overline{a}\;\overline{b}\;\overline{c}]^2 = \begin{vmatrix} \overline{a}\cdot\overline{a} & \overline{a}\cdot\overline{b} & \overline{a}\cdot\overline{c} \\ \overline{b}\cdot\overline{a} & \overline{b}\cdot\overline{b} & \overline{b}\cdot\overline{c} \\ \overline{c}\cdot\overline{a} & \overline{c}\cdot\overline{b} & \overline{c}\cdot\overline{c} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} l^2 & \frac{l^2}{2} & \frac{l^2}{2} \\ \frac{l^2}{2} & l^2 & \frac{l^2}{2} \\ \frac{l^2}{2} & \frac{l^2}{2} & l^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{l^6}{2}$$

$$\therefore [\overline{a}\;\overline{b}\;\overline{c}] = \frac{l^3}{\sqrt{2}}$$

மேலும் $|(\overline{b}-\overline{a})\times\overline{c}|^2 = \{(\overline{b}-\overline{a})\times\overline{c}\}\cdot\{(\overline{b}-\overline{a})\times\overline{c}\}$

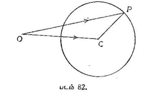
$$= \begin{vmatrix} (\overline{b}-\overline{c})\cdot(\overline{b}-\overline{a}) & (\overline{b}-\overline{a})\cdot\overline{c} \\ \overline{c}\cdot(\overline{b}-\overline{a}) & \overline{c}\cdot\overline{c} \end{vmatrix}$$

ஆனால் $\overline{c}\cdot(\overline{b}-\overline{a}) = \overline{c}\cdot\overline{b}-\overline{c}\cdot\overline{a} = \frac{l^2}{2}-\frac{l^2}{2}=0$

$$(\overline{b}-\overline{a})\cdot(\overline{b}-\overline{a}) = \overline{b}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{a}-2\,\overline{b}\cdot\overline{a}$$
$$= l^2+l^2-2\,\frac{l^2}{2}$$
$$= l^2$$
$$\overline{c}\cdot\overline{c} = l^2$$
$$\therefore\ |(\overline{b}-\overline{a})\times\overline{c}\,|^2 = \begin{vmatrix} l^2 & 0 \\ 0 & l^2 \end{vmatrix}$$
$$= l^4$$
$$\therefore\ |(\overline{b}-\overline{a})\times\overline{c}\,| = l^2$$
எனவே $d = \dfrac{[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}]}{[\,|(\overline{b}-\overline{a})\times\overline{c}\,|\,]}$
$$= \frac{\frac{l^3}{\sqrt{2}}}{l^4} = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

அதாவது lஐப் பக்கமாயுடைய சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தில் பாதியாகும்.

§ 5 25. கோளங்கள் (Spheres)



படம் 82.

கோளத்தின் சமன்பாடு: கோளத்தின் மையம் C எனவும், ஆரம் 'a' எனவும் இருக்கட்டும். மையத்தின் நிலை வெக்டர் $\overline{c}$ என்க. கோளத்தின் பரப்பில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி Pயின் நிலைவெக்டர் $\overline{r}$ என்க.

$$\therefore\ \overline{CP} = \overline{OP}-\overline{OC}$$
$$= \overline{r}-\overline{c}$$
$$|\overline{CP}| = |\overline{r}-\overline{c}| = a$$
$$\therefore\ |\overline{r}-\overline{c}|^2 = a^2$$
i.e. $\overline{r}^2-2\overline{r}\cdot\overline{c}+\overline{c}^2-a^2=0$

$\overline{c}^2-a^2 = K$ எனில்

$\overline{r}^2-2\overline{r}\cdot\overline{c}+K=0$ என்பதுதான் கோளத்தின் சமன்பாடு ஆகும். ஏனெனில் கோளத்தின்மீது உள்ள எந்த ஒரு புள்ளியின் நிலைவெக்டரும்

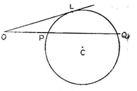
இச்சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்யும். எனவே கோளத்தின் சமன்பாடு $\overline{r}^2 - 2\overline{r} \cdot \overline{c} + K = 0$ ஆகும்.

§ 5·26. ஒரு நேர்கோடு கோளத்தினை வெட்டும் புள்ளிகளைக் காணுதல்

ஏதோ ஓர் ஆதியைப் பொறுத்து $C(\overline{c})$ என்ற மையமும் 'a' எனும் ஆரமும் உடைய கோளத்தின் சமன்பாடு

$$\overline{r}^2 - 2\overline{r} \cdot \overline{c} + k = 0 \qquad \ldots\ldots(1)$$

$B(\overline{b})$ என்ற புள்ளி வழியே $\hat{d}$ என்ற ஓரலகு வெக்டருக்கு இணையான நேர்கோடு கோளத்தினை வெட்டும் புள்ளிகள் P, Q என்க.



படம் 83.

அக்கோட்டின் சமன்பாடு $\overline{r} = \overline{b} + t\hat{d}$ ......(2)

இரண்டின் வெட்டுப்புள்ளிகளைக் காண (1)ஐம் (2)ஐம் தீர்வுகாண வேண்டும்.

i.e. (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$(\overline{b} + t\hat{d})^2 - 2(\overline{b} + t\hat{d}) \cdot \overline{c} + k = 0$$

i.e. $\overline{b}^2 + t^2\hat{d} \cdot \hat{d} + 2t\, \overline{b} \cdot \hat{d} - 2\overline{b} \cdot \overline{c} - 2t\, \overline{c} \cdot \hat{d} + k = 0.$

i.e. $t^2 + 2t(\overline{b} - \overline{c}) \cdot \hat{d} + \overline{b}^2 - 2\overline{b} \cdot \overline{c} + k = 0$ ......(3)

இச்சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கும் இரண்டு t மதிப்புகள் P, Q எனும் இரண்டு வெட்டும் புள்ளிகளுக்கும் தகுந்தவையாகும். $BP = t_1$, $BQ = t_2$ என்பவை இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள்.

$$\therefore \quad \overline{BP} = t_1\hat{d};\ \overline{BQ} = t_2\hat{d}.$$

$$\therefore \quad BP \cdot BQ = t_1 t_2 = \overline{b}^2 - 2\overline{b} \cdot \overline{c} + k$$

{இருபடிச் சமன்பாட்டில் தீர்வுகளின் பெருக்கல் $=$ "$+\frac{c}{a}$" என்ற வாய்பாட்டின்படி}.

சமன்பாடு (1)ன் இடப்பக்க மதிப்பை $F(\overline{r})$ என்று குறித்தால் $BP \cdot BQ = F(\overline{b})$ என்பது வெளிப்படை.

இவ்வாறு $BP \cdot BQ$ என்ற பெருக்கல் மதிப்பு $\overline{b}$ன் மதிப்பைச் சார்ந்திருக்கிறது. $\hat{d}$ன் மதிப்பைச் சார்ந்து அமையவில்லை என்பதும் தெளிவாகும். எனவே $BP \cdot BQ$ன் மதிப்பு நிலையானதாயும், BPQவின்

திசையைச் சாராமலும் அமைகிறது. P, Q என்ற வெட்டுப்புள்ளிகள் ஒன்றோடு மற்றது ஒன்றும் நிலையில், BPQ என்ற கோடு BL என்ற தொடுகோடாகிவிடும். அப்போது $BL^2 = F(\bar{b})$.

குறிப்பு: (1) $F(\bar{b})$ என்ற மதிப்பு கோளத்தைப் பொறுத்து Bயின்படி எனப்படும். (Power of the point with respect to the sphere).

(2) ஆயத்தொலை வடிவகணிதத்தில் $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற வட்டத்தினைப் பொறுத்து (x_1, y_1) என்ற புள்ளியின்படி வட்டச் சமன்பாட்டின் இடதுபக்க மதிப்பில் xக்கு x_1ம், yக்கு y_1ம் எனப் பிரதியிட்டால் கிடைப்பது போன்றே இங்கும் அமைந்திருப்பது காண்க.

§ 5·27. கோளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுதளம் (Tangent plane at a point on a Sphere)

கோளத்தின் சமன்பாடு $F(\bar{r}) = \bar{r}^2 - 2\bar{r}\cdot\bar{c} + k = 0$......(1) என்க. $B(\bar{b})$ என்ற புள்ளி கோளத்தின் புறப்பரப்பிலுள்ள (Surface) ஒரு புள்ளியெனில் $F(\bar{b}) = 0$.

i.e. $\bar{b}^2 - 2\bar{b}\cdot\bar{c} + k = 0$......(2)

தொடுதளத்திலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $\bar{r}$ எனில், $\bar{r} - \bar{b}$ எனும் வெக்டர் அத்தளத்தில் அமைவதால் தொடுபுள்ளிக்கு வரையப்படும் ஆரத்திற்குச் செங்குத்து.

அதாவது $(\bar{b} - \bar{c})\cdot(\bar{r} - \bar{b}) = 0$

எனவே இதுவே தொடுதளத்தின் செங்குத்து அமைப்புச் சமன்பாடாகும். இதனை

$$(\bar{r}\cdot\bar{b}) - (\bar{r}\cdot\bar{c}) - (\bar{b}\cdot\bar{b}) + \bar{b}\cdot\bar{c} = 0.$$

i.e. $\bar{r}\cdot\bar{b} - \bar{r}\cdot\bar{c} + \bar{b}\cdot\bar{c} - \bar{b}^2 = 0$

என எழுதலாம். (2)ஐக் கூட்டினால்,

$\bar{r}\cdot\bar{b} - \bar{c}\cdot(\bar{r} + \bar{b}) + k = 0$ என்றாகும்.

இதுவே தொடுதளத்தின் சமன்பாடாகும்.

குறிப்பு: ஆயத்தொலை வடிவகணிதத்தில் $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோட்டிற்குச் சமன்பாடு எழுதுகையில் x^2க்கு xx_1, y^2க்கு yy_1, $2gx$க்கு $g(x+x_1)$, $2fy$க்கு $f(y+y_1)$ என எழுதுவது போல் இங்கும் $\bar{r}$க்கு $\bar{r}\cdot\bar{b}$, $2\bar{r}\cdot\bar{c}$க்குப் பதில் $\bar{c}\cdot(\bar{r}+\bar{b})$ என அமைவது குறிப்பிடத்தகுந்த ஒன்றாகும்.

§ 5·28. கோளம் ஒன்றினைத் தளம் ஒன்று தொடுவதற்கான நியதி

தளத்தின் சமன்பாடு $\overline{r}\cdot\overline{n}-q=0$ எனவும்......(1)

கோளத்தின் சமன்பாடு $\overline{r}^2-2\overline{r}\cdot\overline{c}+k=0$ எனவும்......(2)

கொள்க. தளம் (1), கோளம் (2)ஐத் தொடுவதற்கான நியதி காண வேண்டும்.

கோள மையம் Cயிலிருந்து தளம் (1)க்கு உள்ள செங்குத்துத் தூரம் ஆரத்திற்குச் சமமாயிருக்க வேண்டும். அதாவது

$$\left\{\frac{q-\overline{r}\cdot\overline{n}}{n}\right\}^2 = a^2 \qquad \{\text{ஆரம்} = a \text{ எனில்}\}$$

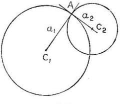
$$= \overline{c}^2-k \qquad \{\because\ k=\overline{c}^2-a^2\}$$

$$(n \text{ என்பது} = |\overline{n}|)$$

இதுவே தேவையான நியதியாகும்.

§ 5·29. செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொள்ளும் இரு கோளங்கள் (Orthogonal Spheres)

$\overline{c}_1$ என்ற நிலைவெக்டர் உடைய மையமும், $\overline{a}_1$ என்ற ஆரமும் உடைய கோளத்தின் சமன்பாடு



படம் 84.

$$\overline{r}^2-2\overline{r}\cdot\overline{c}_1+K_1=0; \quad K_1=\overline{c}_1{}^2-a_1{}^2$$

இதேபோன்று $\overline{c}_2$ என்ற மையமும் a_2 என்ற ஆரமும் உடைய கோளத்தின் சமன்பாடு $\overline{r}^2-2\overline{r}\cdot\overline{c}_2+K_2=0$; $K_2=\overline{c}_2{}^2-a_2{}^2$. இரு கோளங்களும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளில் ஒன்று A என்க. Aயில் இரு கோளங்களுக்கும் வரையப்படும் தொடு தளங்களில் ஒன்றின் தொடு தளம் மற்றதின் மையம் வழிச் செல்லுமானல் இரு கோளங்

களும் ஒன்றையொன்று செங்கோணத்தில் வெட்டிக்கொள்ளும். மேலும் $C_1\ A\ C_2$ ஒரு செங்கோண முக்கோணமாகும். எனவே

$$C_1C_2^2 = C_1A^2 + C_2A^2$$

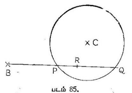
i.e. $(\overline{c}_2 - \overline{c}_1)^2 = a_1^2 + a_2^2$

i.e. $\overline{c}_2^2 + \overline{c}_1^2 - 2\overline{c}_1 \cdot \overline{c}_2 = \overline{c}_1^2 - K_1 + \overline{c}_2^2 - K_2$

i.e. $2\overline{c}_1 \cdot \overline{c}_2 = K_1 + K_2$

இதுவே இரு கோளங்கள் செங்கோணத்தில் வெட்டிக்கொள்வதற்கான நியதியாகும்.

§ 5·30. $\overline{r}^2 - 2\overline{r}\cdot\overline{c} + K = 0$ என்ற கோளத்தைப் பொறுத்து $B(\overline{b})$ என்ற புள்ளியின் இசைத் தளத்தின் (Polar plane) சமன்பாடு காணுதல்



படம் 85.

$C(\overline{c})$ என்ற மையமும் 'a' எனும் ஆரமும் உடைய கோளத்தின் சமன்பாடு $\overline{r}^2 - 2\overline{r}\cdot\overline{c} + K = 0$ ஆகும். $B(\overline{b})$ என்பது ஒரு புள்ளி. இதன் வழிச் செல்லும் ஒரு வெட்டுக் கோடு (Secant) கோளத்தினை P, Q என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால் அக்கோட்டில் R எனும் புள்ளியை BP, BR, BQ என்பன ஓர் இசைத் தொடரில் இருக்குமாறு எடுத்துக் கொள்க. அக்கோட்டின் வெவ்வேறு நிலைகளுக்கேற்ப, Rன் இயங்கு வரையே Bயின் இசைத்தளம் எனப்படும்.

BPQ என்ற கோடு $\hat{d}$ எனும் ஓரலகு வெக்டரின் திசையில் அமையட்டும். அப்படியானால் BPQவின் சமன்பாடு

$\overline{r} = \overline{b} + t\hat{d}$ ஆகும்.

P, Qவுக்குத் தகுந்த tன் மதிப்புகள்

$t^2 + 2\hat{d}\cdot(\overline{b} - \overline{c})t + \overline{b}^2 - 2\overline{b}\cdot\overline{c} + K = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும். $\hat{d}$ என்பது ஓரலகு வெக்டராகையால், t_1, t_2 என்ற இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் BP, BQ என்ற உண்மைத் தூரங்களைக் குறிக்கும்.

$$\therefore\ BP + BQ = t_1 + t_2 = 2\hat{d}\cdot(\overline{c} - \overline{b})$$

$$BP \cdot BQ = t_1 t_2 = \overline{b}^2 - 2\overline{b}\cdot\overline{c} + K$$

BP, BR, BQ என்பன இசைத்தொடரில் உள்ளனவாகையால்

$$BR = \frac{2\,BP \cdot BQ}{BP + BQ}$$

$$= \frac{2\,(\overline{b}^2 - 2\,\overline{b}\cdot\overline{c} + K)}{2\,\hat{d}\cdot(\overline{c}-\overline{b})}$$

$$= \frac{\overline{b}^2 - 2\,\overline{b}\cdot\overline{c} + K}{\hat{d}\cdot(\overline{c}-\overline{b})} \qquad \ldots\ldots (1)$$

மேலும் $\overline{BR} = \overline{r} - \overline{b} = BR \cdot \hat{d}$

$$\therefore\ \hat{d} = \frac{\overline{r}-\overline{b}}{BR}$$

$$\therefore\ BR = \frac{\overline{b}^2 - 2\overline{b}\cdot\overline{c} + K}{\left\{\frac{(\overline{r}-\overline{b})\cdot(\overline{c}-\overline{b})}{BR}\right\}}$$

$$= BR\,\frac{(\overline{b}^2 - 2\,\overline{b}\cdot\overline{c} + K)}{(\overline{r}-\overline{b})\cdot(\overline{c}-\overline{b})}$$

i.e. $(\overline{r}-\overline{b})\cdot(\overline{c}-\overline{b}) = \overline{b}^2 - 2\overline{b}\cdot\overline{c} + k$

i.e. $(\overline{r}-\overline{b})\cdot(\overline{b}-\overline{c}) + \overline{b}^2 - 2\overline{b}\cdot\overline{c} + k = 0$

i.e. $\overline{r}\cdot\overline{b} - \overline{r}\cdot\overline{c} - \overline{b}^2 + \overline{b}\cdot\overline{c} + \overline{b}^2 - 2\overline{b}\cdot\overline{c} + k = 0$

i.e. $\overline{r}\cdot\overline{b} - \overline{c}\cdot(\overline{r}+\overline{b}) + k = 0.$

இது Rன் பல நிலைகளுக்கும் பொருந்துவதால் இதுவே Rன் இயங்குவரையாகும். மேலும் இது ஒரு தளத்தின் சமன்பாடு என்பது தெரியும். எனவே Rன் இயங்குவரை ஒரு தளமாகும். இதனைத்தான் Bயின் இசைத்தளம் என்கிறோம்.

§ 5·31. ஒரு கோளத்தினைப் பொறுத்து ஒரு புள்ளியின் இசைத்தளம் வேறொரு புள்ளியின் வழிச் சென்றால், இரண்டாவது புள்ளியின் இசைத்தளம் முதற்புள்ளி வழிச் செல்லும்

$B(\overline{b})$ என்ற புள்ளிக்கு $\overline{r}^2 - 2\overline{r}\cdot\overline{c} + k = 0$ என்ற கோளத்தினைப் பொறுத்து இசைத்தளம் $\overline{r}\cdot\overline{b} - \overline{c}\cdot(\overline{r}+\overline{b}) + k = 0$ ஆகும்.

இது $D(\overline{d})$ என்ற புள்ளிவழிச் சென்றால்,

$$\overline{d}\cdot\overline{b} - (d + \overline{b})\cdot\overline{c} + k = 0 \qquad \ldots\ldots (1) \text{ ஆகும்.}$$

மேலும் $D(\overline{d})$யின் இசைத்தளத்தின் சமன்பாடு

$$\overline{r}\cdot\overline{d} - \overline{c}\cdot(\overline{r}+\overline{d}) + k = 0.$$

இது $B(\overline{b})$ வழிச் செல்ல வேண்டுமானல்,

$\overline{b}\cdot\overline{d}-\overline{c}\cdot(\overline{b}+\overline{d})+k=0$ என இருக்கவேண்டும். (1)ன் படி இது உண்மையாகும். எனவே Bயின் இசைத்தளம் D வழிச் சென்றல், Dயின் இசைத்தளம் Bயின் வழிச் செல்கிறது.

குறிப்பு : இவ்வகைப் புள்ளிகள் இரண்டும் துணையியப்புள்ளிகள் (Conjugate points) எனப்படும்.

§ 5·32. விட்டத்தளம் (Diametral plane)

$\overline{b}$ எனும் ஒரு வெக்டருக்கு இணையாக வரையப்படும் நாண்களின் நடுப்புள்ளிகள் ஒருதளத்தில் அமையும். அத்தளம் கோளத்தின் விட்டத்தளம் எனப்படும்.

கோளத்தின் சமன்பாடு $\overline{r}^2-2\overline{r}\cdot\overline{c}+k=0$ என்க. ...... (1)

$\overline{b}$க்கு இணையான ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$\overline{r}=\overline{d}+t\overline{b}$ என்க. ...... (2)

இதில் $\overline{d}$ என்பது நாணின் நடுப்புள்ளியின் நிலைவெக்டர்; மாறும் தன்மை உடையது; $\overline{b}$ மாருதது. இவ்விரண்டின் வெட்டுப்புள்ளி களுக்குத் தருந்த tன் மதிப்புகள்

$(\overline{d}+t\overline{b})^2-2(\overline{d}+t\overline{b})\cdot\overline{c}+k=0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கும்.

i.e. $\overline{d}^2+t^2\overline{b}^2+2t\,\overline{d}\cdot\overline{b}-2\overline{d}\cdot\overline{c}-2t\,\overline{b}\cdot\overline{c}+k=0.$

i.e. $t^2\,\overline{b}^2+2\overline{b}\cdot(\overline{d}-\overline{c})t+\overline{d}^2-2\overline{d}\cdot\overline{c}+k=0.$

$\overline{d}$, நாணின் நடுப்புள்ளியாதலால், tயின் மதிப்புகள் அளவில் சமமாயும் குறியீட்டில் எதிராகவும் அமையும்.

$\therefore$ தீர்வுகளின் கூட்டல் $\dfrac{2\overline{b}\cdot(\overline{d}-\overline{c})}{|\overline{b}|^2}=0$

i.e. $\overline{b}\cdot(\overline{d}-\overline{c})=0.$

$\therefore$ நடுப்புள்ளியின் இயங்குவரை $\overline{b}\cdot(\overline{r}-\overline{c})=0$ என்பதாகும். இது ஒரு தளத்தின் சமன்பாடு என்பதுவும், கோள மையத்தின் வழியே $\overline{b}$க்குச் செங்குத்தாக அமையும் என்பதுவும் புலனுகிறது.

§ 5·33. சமதொடுகோட்டுத் தளம் (Radical plane)

வரையறை : இரு கோளங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் சமமாக இருக்கும்படி நகரும் ஒரு புள்ளியின் இயங்குவரை கோளங் களின் சமதொடுகோட்டுத் தளம் எனப்படும்.

$\overline{r}^2-2\overline{r}\cdot\overline{c_1}+k_1=0$; $\overline{r}^2-2\overline{r}\cdot\overline{c_2}+k_2=0$ என்பவை இரு கோளங்கள் என்க.

$P(\bar{r}_1)$ என்பது, அதனின்றும் இரு கோளங்களுக்கும் வரையப் படும் தொடு கோடுகளின் நீளங்கள் சமமாயுள்ளவாறு அமைந்த ஒரு புள்ளி என்க.

$$\therefore\ \bar{r}_1^2 - 2\bar{r}_1 \cdot \bar{c}_1 + k_1 = r_1^2 - 2\bar{r}_1 \cdot \bar{c}_2 + k_2$$

$$\therefore\ 2\bar{r}_1 \cdot (\bar{c}_2 - \bar{c}_1) = k_2 - k_1$$

$\therefore\ P(\bar{r}_1)$ன் இயங்கு வரை

$2\bar{r} \cdot (\bar{c}_2 - \bar{c}_1) = k_2 - k_1$ என்ற தளமாகும்.

இது இரு கோளங்களின் மையங்களை இணைக்கும் நேர் கோட்டிற்குச் செங்குத்து என்பதும் சமன்பாட்டிலிருந்து புலனாகும்.

கோளங்களின் சமன்பாடுகள் முறையே $F_1(\bar{r}) = 0$, $F_2(\bar{r}) = 0$ எனில் $F_1(\bar{r}) - F_2(\bar{r}) = 0$ என்பது சமதொடு கோட்டுத் தளத்தின் சமன்பாடாகும்.

§ 5·34. $F(\bar{r}) = 0$; $F'(\bar{r}) = 0$ **என்ற கோளங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டும் கோளம்** $F(\bar{r}) - \lambda F'(\bar{r}) = 0$ **என்ற கோளத்தினையும்,** λ **என்னும் துணைமாறியின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், செங்குத்தாக வெட்டும். மேலும்** $F(\bar{r}) - \lambda F'(\bar{r}) = 0$ **என்ற சமன்பாடு எந்த இரண்டு கோளங்களை யெடுத்தாலும், ஒரு சம தொடுகோட்டுத் தளம் கொண்டவையாக விளங்கும் கோளத் தொகுதி ஒன்றினைக் குறிக்கும்**

$F(\bar{r}) = \bar{r}^2 - 2\bar{r} \cdot \bar{c} + k = 0$ ...... (1)

$F_1(\bar{r}) = \bar{r}^2 - 2\bar{r} \cdot \bar{c} + k_1 = 0$ ...... (2) என்பவை இரு கோளங்களின் சமன்பாடுகள் என்க.

$$\therefore\ F(\bar{r}) - \lambda F_1(\bar{r}) = \bar{r}^2(1-\lambda) - 2\bar{r} \cdot (\bar{c} - \lambda \bar{c}_1) - (k - \lambda k_1) = 0$$

i.e. $\bar{r}^2 - 2\bar{r} \cdot \dfrac{(\bar{c} - \lambda \bar{c}_1)}{1-\lambda} + \dfrac{k - \lambda k_1}{1-\lambda} = 0$ ...... (3)

(1), (2) ஆகிய கோளங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டும் கோளம் $F_2(\bar{r}) = \bar{r}^2 - 2\bar{r} \cdot \bar{c}_2 + k_2 = 0$ ...... (4) என்க.

$\therefore$ செங்குத்தாக வெட்டுவதற்கான நியதியின்படி

$2\bar{c} \cdot \bar{c}_2 = k + k_2$ ...... (5)

$2\bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2 = k_1 + k_2$ ...... (6)

(3) ஆல் குறிக்கப்படும் கோளத்தினை (4) ஆல் குறிக்கப்படும் கோளம் செங்குத்தாய் வெட்டுமானால்

$$2\left(\frac{\bar{c}-\lambda\bar{c}_1}{1-\lambda}\right)\cdot\bar{c}_2=\frac{k-\lambda k_1}{1-\lambda}+k_2 \text{ என இருக்க வேண்டும்.}$$

அதாவது $2(\bar{c}-\lambda\bar{c}_1)\cdot\bar{c}_2 = k-\lambda k_1+k_2(1-\lambda)$.

i.e. $2\bar{c}\cdot\bar{c}_2-2\lambda\bar{c}_1\cdot\bar{c}_2 = k+k_2-\lambda(k_1+k_2)$.

இது (5)ல் இருந்து λ தடவை (6)ஐக் கழித்தால் கிடைக்கும். எனவே λன் எம்மதிப்புக்கும் (3)ஆல் குறிக்கப்பெறும் கோளத்தை (1), (2)ஐச் செங்குத்தாக வெட்டும் கோளம் செங்குத்தாக வெட்டும்.

மேலும் $\lambda=\lambda_1, \lambda_2$ என இரு மதிப்புகளுக்குத் தகக் கிடைக்கும் கோளங்கள்

$$\bar{r}^2-2\bar{r}\cdot\left(\frac{\bar{c}-\lambda_1\bar{c}_1}{1-\lambda_1}\right)+\frac{k-\lambda_1 k_1}{1-\lambda_1}=0 \quad \ldots\ldots (7)$$

$$\text{மேலும் } \bar{r}^2-2\bar{r}\cdot\frac{(\bar{c}-\lambda_2\bar{c}_1)}{1-\lambda_2}+\frac{k-\lambda_2 k_1}{1-\lambda_2}=0 \quad \ldots\ldots (8)$$

இவ்விரண்டு கோளங்களின் சம தொடுகோட்டுத் தளத்தின் சமன்பாடு (7)ல் இருந்து (8)ஐக் கழித்தால் கிடைக்கும்.

$$2\bar{r}\cdot\left\{\frac{\bar{c}-\lambda_2\bar{c}_1}{1-\lambda_2}-\frac{\bar{c}-\lambda_1\bar{c}_1}{1-\lambda_1}\right\}+\frac{k-\lambda_1 k_1}{1-\lambda_1}-\frac{k-\lambda_2 k_1}{1-\lambda_2}=0.$$

$$\text{i.e. } 2\bar{r}\cdot\left\{\frac{\bar{c}-\lambda_1\bar{c}-\lambda_2\bar{c}_1+\lambda_1\lambda_2\bar{c}_1-\bar{c}+\lambda_1\bar{c}_1+\lambda_2\bar{c}-\lambda_1\lambda_2\bar{c}_1}{(1-\lambda_2)(1-\lambda_1)}\right\}$$

$$+\frac{k-k\lambda_2-\lambda_1 k_1+\lambda_1\lambda_2 k_1-k+\lambda_2 k_1+\lambda_1 k-\lambda_1\lambda_2 k_1}{(1-\lambda_2)(1-\lambda_1)}=0.$$

$$2\bar{r}\cdot\{(\lambda_2-\lambda_1)\bar{c}-(\lambda_2-\lambda_1)\bar{c}_1\}+k(\lambda_1-\lambda_2)-k_1(\lambda_1-\lambda_2)=0$$

$$\text{i.e. } 2\bar{r}\cdot(\bar{c}-\bar{c}_1)=k-k_1.$$

இதுவே (1), (2)ஆல் குறிக்கப்படும் கோளங்களின் சம தொடு கோட்டுத் தளம் ஆகும்.

எனவே $F(\bar{r})-\lambda F_1(\bar{r})=0$ என்ற சமன்பாடு, எந்த இரண்டு கோளங்களை எடுத்துக் கொண்டாலும் ஒரே சமதொடுகோட்டுத் தளம் உடையனவாய் அமையும் ஒருகோளத் தொகுதியைக் குறிக்கும். இம் மாதிரி கோளத் தொகுதியினை ஒரே தொடுதளக் கோளங்கள் (Coaxal Spheres) என அழைப்பர்.

பயிற்சி 5

1. $\overline{r}\cdot(3, -1, 1)=1, \overline{r}\cdot(1, 4, -2)=2$ என்ற இரு சமதளங்களின் வெட்டுக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க. அக்கோட்டினையும் $(2, -4, 5)$ என்ற புள்ளியையும் கொண்ட தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

2. $2x-3y-7z=0$; $3x-14y-13z=0$; $8x-31y-33z=0$ என்ற தளங்கள் ஒரே நேர்கோட்டு வழியாகச் செல்கின்றன என நிறுவி அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

3. $x+2y+3z=0$; $3x+2y+z=0$ என்ற தளங்களின் வெட்டுக் கோடு x, z அச்சுக்களுடன் சமமான சாய்வில் இருக்கிறது எனவும், y அச்சுடன் $\frac{1}{2}\,\mathrm{Sec}^{-1}3$ எனும் கோணத்தை உருவாக்குகிறது எனவும் நிறுவுக.

4. $(1, 1, 1)$ $(-3, 0, 1)$ எனும் புள்ளிகள் $3x+4y-12z+13=0$ எனும் தளத்திலிருந்து சமதூரத்தில் ஆனல் எதிர்ப்பக்கங்களில் அமைந்துள்ளன என நிறுவுக.

5. $(2, 3, 4)$ $(1, 1, 4)$ எனும் புள்ளிகள் $3x-6y+2z+11=0$ எனும் தளத்தின் ஒரே பக்கத்தில் அமைகின்றன என நிறுவி தளத்திலிருந்து அவற்றின் தூரங்களைக் கணக்கிடுக.

6. $\overline{r}\cdot(1, 2, 2)=9$, $\overline{r}\cdot(4, -3, 12)+13=0$ என்ற தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணத்தை இருசமக் கூறிடும் தளங்களின் சமன்பாடு என்ன? எந்தத் தளம், ஆதியை உள்ளடக்கிய பகுதியிலுள்ள கோணத்தை இருசமக் கூறிடுகிறது?

7. $\overline{r}\cdot\overline{n}=q$ எனும் தளத்தில் $\overline{a}$ என்ற புள்ளியின் பிம்பம் (Reflection) என்ன? அதே தளத்தில் $\overline{r}=\overline{a}+t\overline{b}$ என்ற நேர்கோட்டின் பிம்பம் என்ன?

8. $\overline{r}=\overline{b}+t\overline{c}$ என்ற கோட்டில் $\overline{a}$யின் பிம்பம் என்ன?

9. $\overline{r}\cdot(2, -1, 1)+3=0$ல் $(1, 3, 4)$ன் பிம்பம் என்ன?

10. கொடுக்கப்பட்ட சமதளம் ஒன்று, மூவளவை ஆயங்களில் வெட்டும் வெட்டுத் துண்டுகளின் இருபடிகளின் தலைகீழ் மதிப்புகளின் கூட்டல், கொடுக்கப்பட்ட ஆதியையுடைய எந்த மூன்று ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூவளவை ஆயங்களுக்கும் நிலையான மதிப்பாகும் என நிறுவுக.

11. $\overline{r}=\overline{a}+t\overline{b}$; $\overline{r}=\overline{b}+s\overline{a}$ என்ற கோடுகளைக் கொண்ட தளத்தின் சமன்பாடு $[\overline{r}\ \overline{a}\ \overline{b}]=0$ எனக் காண்பி.

12. $\overline{r}=\overline{a}+t\overline{b}$ என்ற கோட்டினைக் கொண்டதும் $\overline{r}\cdot\overline{c}=\overline{p}$ என்ற தளத்திற்குச் செங்குத்தானதுமான தளத்தின் சமன்பாடு என்ன?

13. $\overline{r}=\overline{a}+s\overline{b}$; $\overline{r}=\overline{c}+t\overline{b}$ எனும் இணைகோடுகளைக் கொண்ட சம தளத்தின் சமன்பாடு என்ன?

14. ஒரு நாற்பக்கப் பிழம்புருவின் அடுத்தடுத்த இரு பக்கத் தளங்களுக்கிடைப்பட்ட கோணத்தை இரு சமக் கூறிடும் ஆறுதளங்கள் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கும் எனக் காண்பி.

15. $\overline{r}-\overline{c}=t\overline{d}$ என்ற நேர்கோடு $\overline{r}\cdot\overline{n}=p$ என்ற தளத்தினை வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

16. $(1, 3, -2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $(4, -4, -2)$ என்ற வெக்டருக்கு இணையாக $\overline{r}\cdot(1, -1, 1)=7$ என்ற தளத்திற்குத் தொலைவு என்ன?

17. O எனும் புள்ளியிலிருந்து $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ எனும் இரு வெக்டர்கள், $\overline{OB}$ மாறிலியாகவும், $\overline{OA}$ மாறியாகவும் இருக்குமாறு வரையப்படுகின்றன. $\overline{OB}\cdot\overline{OA}$ = மாறிலியான எண் எனும் சமன்பாடு ஒரு தளத்தினைக் குறிக்கும் எனக் காண்பி.

18. $A\ (1, 2, 3)$ $B\ (2, 4, 5)$ என்ற புள்ளிகள் வழியே முறையே $(2, 3, 4)$ $(3, 4, 5)$ எனும் வெக்டர்களுக்கு இணையாகச் செல்லும் நேர்கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட மிகக்குறைந்த தூரம் என்ன? மிகக்குறைந்த தூரக்கோட்டின் சமன்பாடு என்ன?

19. $A\ (0, 2, -3)$ $B\ (1, 4, 0)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடு $C\ (2, 6, 3)$, $D\ (4, 9, 7)$ ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டினை வெட்டும் என நிறுவுக. இவ்விரண்டு நேர்கோடுகளும் $\overline{r}\cdot(1, -2, 1)+7=0$ என்ற சமதளத்தில் உள்ளன எனக் காண்பி.

20. $(4, -3, -1)$ வழியாக $(1, -4, 7)$ என்ற வெக்டருக்கு இணையான நேர்கோட்டினை $(1, -1, -10)$ வழியாக $(2, -3, 8)$ என்ற வெக்டருக்கு இணையான நேர்கோடு வெட்டும் எனக் காண்பி. வெட்டும் புள்ளி $(5, -7, 6)$ எனக் காண்பி.

21. $(3, 8, 3)$ $(-3, -7, 6)$ எனும் புள்ளிகள் வழியே முறையே $(3, -1, 1)$ $(-3, 2, 4)$ என்ற வெக்டர்களுக்கு இணையான நேர்கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட மிகக்குறைந்த தூரத்தினைக் கணக்கிடுக. மிகக் குறைந்த தூரக் கோட்டின் சமன்பாடு என்ன?

22. $3x-9y+5z=0=x+y-z$, $6x+8y+3z-13=0=x+2y+z-3$ என்ற கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட மிகக்குறைந்த

தூரத்தினைக் காண்க. மிகக்குறைந்த தூரக்கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

23. $\bar{r}=\bar{a}+t\,\bar{b}$; $\bar{r}=s\,\bar{c}$ என்ற கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட மிகக் குறைந்த தூரத்தினையும், பொதுச் செங்குத்துக்கோட்டின் சமன்பாட்டினையும் காண்க.

24. $\bar{c}$ என்ற புள்ளிவழி, $\bar{r}-\bar{a}=s\,\bar{b}$; $\bar{r}-\bar{a}'=t\,\bar{b}$ எனும் கோடுகள் இரண்டினையும் வெட்டும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

25. ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளாத இரு நேர்கோடுகளின் முனைகளையுடைய மாறும் நேர்கோடுகளின் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வரை அவ்விரு கோடுகளுக்கும் உள்ள பொதுச்செங்குத்துக் கோட்டின் நடுப்புள்ளி வழி அதற்குச் செங்குத்தான தளம் என நிறுவுக.

26. $\bar{a}$ என்ற புள்ளி வழியே $\bar{r}\cdot\bar{n}=q$ என்ற தளத்திற்கு இணையாக, ஆனால் $\bar{r}-\bar{b}=t\,\bar{c}$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தாய் அமையும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $(\bar{r}-\bar{a})\times(\bar{n}\times\bar{c})=0$ என நிறுவுக.

27. $\bar{r}\times\bar{a}=\bar{b}\times\bar{a}$; $\bar{r}\times\bar{b}=\bar{a}\times\bar{b}$ என்ற கோடுகள் வெட்டுகின்றன என நிறுவி, வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

28. $A\,(-5i+7j+3k)$ என்ற புள்ளிவழி $3i-j+4k$ என்ற வெக்டருக்கு இணையான கோட்டின் சமன்பாட்டினைத் துணையலகு வடிவிலும் (parametric form) துணையலகு அல்லாத வடிவிலும் (non-parametric form) காண்க.

29. $3i+6j-5k$, $i-3j+7k$ என்ற புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டினைத் துணையலகு வடிவிலும், துணையலகு அல்லாத வடிவிலும் காண்க.

30. $A\,(3,\,-4,\,-2)$ என்ற புள்ளிவழியே $9i+6j+2k$க்கு இணையான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $\dfrac{x-3}{9}=\dfrac{y+4}{6}=\dfrac{z+2}{2}$ எனக் காண்பி.

31. $A\,(-5,2,3)$ $B\,(4,-3,6)$ எனும் புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

32. நேர்கோட்டிற்கு வெக்டர் சமன்பாடு காணும் முறையினைக் கொண்டு ஓர் இணைகரத்தின் ஒரு முனையை எதிர்ப்பக்கம் ஒன்றின் நடுப்புள்ளிக்கு இணைக்கும் கோடு மூலைவிட்டத்தினை முச்சமக்கூறிடும் என நிறுவுக.

33. ABC ஒரு முக்கோணம். P முக்கோணத்தின் தளத்தில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. AP, BP, CP முதலியன முறையே BC, CA,

ABயை D, E, Fல் வெட்டினால், $\frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{BF} = 1$ எனக் காண்பி.

34. $\overline{r} = \overline{a}+2\overline{b}+\overline{c}+t(-3\overline{a}+\overline{b}-\overline{c})$;
$\overline{r} = 13\overline{a}+10\overline{b}+7\overline{c}+t(3\overline{a}+5\overline{b}+2\overline{c})$ என்ற நேர்கோடுகளின் வெட்டும்புள்ளியைக் காண்க.

35. $\overline{r}=2\overline{a}+3\overline{b}+t\overline{c}$ என்ற கோடும் $\overline{r} = (\overline{a}-\overline{b})+s(\overline{a}+\overline{c}-\overline{b}) + k(\overline{a}+\overline{b}-\overline{c})$ என்ற தளமும் வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

36. ஒரு முக்கோணத்தில் ஒரு கோணத்தின் வெளி இருசம வெட்டி எதிர்ப்பக்கத்தினை வெளிப்பக்கமாய் மற்ற இருபக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கும் என நிறுவுக.

37. $\overline{a}$ எனும் புள்ளிவழியே $\hat{e}$ எனும் ஓரலகு வெக்டருக்கு இணையான நேர்கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடு $(\overline{r}-\overline{a})\times\hat{e}=0$ எனவும் $P(\overline{p})$ எனும் புள்ளியிலிருந்து கோட்டிற்குள்ள செங்குத்துத் தூரம் $|(\overline{p}-\overline{a})\times\hat{e}|$ எனவும் நிறுவுக.

38. $A(2i+3j-4k)$; $B(8i+6j-8k)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டிலிருந்து $P(-1, 2, 6)$ என்ற புள்ளியின் செங்குத்துத் தூரம் என்ன?

39. $\overline{p}$ என்பது பூச்சியமல்லாத வெக்டர்; a என்பது ஒரு மெய்யெண் எனில் $\overline{r} \cdot \overline{p} = \overline{a}$ என்பது ஒரு தளத்தின் சமன்பாடு என நிறுவுக. [Bsc. து. பா. செப். 60]

40. ஒரு நிலையான புள்ளி Aயின் நிலைவெக்டர் $\overline{a}$; P எனும் நகரும் புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $\overline{r}$; $(\overline{r}-\overline{a})\cdot\overline{a}=0$ எனும் சமன்பாட்டின் பொருள் விளக்கம் கூறு. [Bsc. து.பா. செப். 68]

41. $A(7, 5, -2)$ என்ற புள்ளி வழியே $7i-3j+5k$; $i+j+k$ என்ற வெக்டர்களுக்கு இணையான தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

42. $A(2i-5j+k)$, $B(3i-j)$ என்ற புள்ளிகள் வழியே $2i+4j+k$ என்ற வெக்டருக்கு இணையான தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

43. $i-2j-k$, $2i+3j+k$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க. $3i+j+k$, $2i+j-3k$, $4i+j+k$, என்ற புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் சமதளத்தின் சமன்பாடு கண்டு அத்தளத்தினை இக்கோடு வெட்டும்புள்ளியைக் காண்க.

44. (a) $5i-j+k$, $2j+k$, $-i+3j+4k$ என்ற வெக்டர்களின் முடிவுப்புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் சமதளத்தின் சமன்பாட்டையும், (b) $P(-2, 6, -6)$, $Q(-3, 10, -9)$, $R(-5, 0, -6)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாட்டினையும் காண்க. [Bsc. செப். 68]

45. $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ என்பன ஒரு தள அமைவில்லாத வெக்டர்கள் எனில் $2\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}$, $\overline{a}+2\overline{b}-\overline{c}$, $-\overline{a}-2\overline{b}+3\overline{c}$, $3\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$ என்ற வெக்டர்களின் முடிவுப் புள்ளிகள் ஒரு தளத்தில் அமையும் என நிறுவுக.

46. $P(4i+5j+k)$, $Q(3i+9j+4k)$, $R(-j-k)$, $S(-4i+j+4k)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரே தளத்தில் அமையும் என நிறுவுக.

47. $-\overline{a}-2\overline{b}-3\overline{c}$; $-4\overline{c}$; $\overline{a}+2\overline{b}-5\overline{c}$; $6\overline{a}-4\overline{b}+4\overline{c}$; என்ற நிலைவெக்டருடைய புள்ளிகள் ஒரு சம தளத்தில் அமையும் என நிறுவுக.

48. $\overline{a}-\overline{b}-\overline{c}$, $\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$; எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு $\overline{a}-3\overline{b}+7\overline{c}$, $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$; எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை வெட்டும் புள்ளியினைக் கண்டுபிடி.

49. $3i+4j+7k$ எனும் வெக்டருக்குச் செங்குத்தாக $2i+3j-k$ என்ற புள்ளி வழியே வரையப்படும் தளத்தின் சமன்பாடு காண்க.

50. $6i-6j+3k$ எனும் வெக்டருக்குச் செங்குத்தாக $-3i+j+6k$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாட்டினைச் செங்குத்துக் கோட்டு அமைப்பில் காண்க.

51. $i+j+k$, $-3i+k$ என்ற புள்ளிகள் $\overline{r}\cdot(3i+4j-12k)+13=0$ என்ற தளத்திலிருந்து சமதூரத்தில், ஆனால் எதிர்ப்பக்கங்களில் அமைகின்றன என நிறுவுக.

52. $A(-1, 2, -3)$, $B(-16, 6, 4)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிற்கும், $C(1, -1, 3)$, $D(4, 9, 7)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிற்கும் இடையில் மிகக் குறைந்த தூரம் 7 அலகுகள் என நிறுவுக.

53. ஒரு தள அமைவில்லாத நான்கு வெக்டர்களிடையே ஒரே ஒரு ஒருபடிச் சேர்வுத் தொடர்புதான் உண்டு (linear relation) என நிறுவுக.

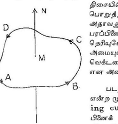
54. ஒரு நான்முகி இரு எதிர் விளிம்புகளுக்கு இணையான தளத்தினால் வெட்டப்பெற்றால், வெட்டுமுகம் ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக.

55. ஒரு கன சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தினை வெட்டாத ஆறு விளிம்புகளின் நடுப்புள்ளிகளும் ஒரே தளத்தில் அமைவன என நிறுவுக.

56. ஒரு தளத்திற்கு வெளியிலுள்ள ஒரு புள்ளி Oவிலிருந்து ON என்ற செங்குத்துக்கோடு வரையப்படுகிறது. அத்தளத்தில் அமைந்த PQ என்ற கோட்டிற்கு OM என்ற செங்குத்துக்கோடு வரையப்படுகிறது. அப்படியானால் MN, PQக்குச் செங்குத்து என நிறுவுக.

6. பரப்புகள், கன அளவுகள்

இரு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கலை வரையறுக்கும்போது, அவ்வெக்டர் பெருக்கலின் எண்ணளவு, அவ்விரு வெக்டர்களை அண்டைப் பக்கங்களாய்க் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்புக்குச் சமமாய் அமையும் என்றும், விளைவு வெக்டர், இணைகரத்தின் தளத்திற்குச் செங்குத்து எனவும் கண்டோம். அதனின்றும் பரப்பளவுகளைக்கூட வெக்டரால் குறிக்க இயலும் என்றும், அதற்கான சில நியதிகளையும் கண்டோம். அதாவது தன்னைத்தானே வெட்டிக்கொள்ளாத ஒரு வளை வரையினுல் அடைபடும் ஒரு பரப்பினை ஒரு வெக்டரினுல் குறிக்க வேண்டுமானுல் (i) அதன் எண்ணளவு அப்பரப்பின் அளவுக்குச் சமமாயிருக்க வேண்டும். (ii) அதன் திசை அப்பரப்பின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாயிருக்க வேண்டும். (iii) அத்துடன் பரப்பினை அடக்கும் வளைவரையினை எத் திசையில் சுற்றுகிருேமோ அதைப் பொறுத்து வெக்டரின்திசை மாறும். அதாவது எத்திசையிலிருந்து நோக்கினுல் பரப்பினைச் சுற்றிவருவது இடஞ்சுழியாகத் தெரியுமோ, அத்திசையில் அவ்வெக்டர் அமையும். இந்த நியதிகளுக்குட்பட்ட வெக்டரை வெக்டர் பரப்பு (vectar area) என அழைக்கிறோம்.



படம் 86.

படத்தில் காட்டியபடி $ABCDA$ என்ற முறையில் சுற்றுவரையில் (bounding curve) நகர்ந்தால், அதன் பரப்பினைக் குறிக்கும் வெக்டர் MN என்ற திசையில் அமையும். மாறிச் சுற்றினுல் வெக்டர் NM என்ற திசையில் அமையும்.

§ 6·01. முக்கோணத்தின் வெக்டர் பரப்பு

ஒரு முக்கோணம் ABCயில் BC, BA என்ற பக்கங்களால் குறிக்கப்படும் வெக்டர்கள் முறையே $\overline{a}$, $\overline{b}$ எனில், வரையறையின்படி,

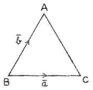
$\overline{a}\times\overline{b} = BC \,.\, BA \,.\, \sin B \,.\, \hat{n}$

$\hat{n}$ என்பது முக்கோணத்தின் தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டராகும்.

$\therefore\ |\overline{a}\times\overline{b}| = BC \,.\, BA \,.\, \sin B$

$= 2$ பரப்பு ΔABC

$\therefore\ \frac{1}{2}(\overline{a}\times\overline{b})$ என்பது முக்கோணத்தின் வெக்டர் பரப்பாகும்.



படம் 87.

வழிமுடிவு :

1. $\overline{a}, \overline{b}$ஐ அண்டைப் பக்கங்களாய்க் கொண்ட இணைகரத்தின் வெக்டர் பரப்பு $= \overline{a}\times\overline{b}$.

2. A, B, C என்ற முக்கோணத்தின் முனைகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ எனில் Δன் வெக்டர் பரப்பு

$$= \tfrac{1}{2}(\overline{c}-\overline{b})\times(\overline{a}-\overline{b})$$
$$= \tfrac{1}{2}\{\overline{c}\times\overline{a}-\overline{c}\times\overline{b}-\overline{b}\times\overline{a}+\overline{b}\times\overline{b}\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{\overline{a}\times\overline{b}+\overline{b}\times\overline{c}+\overline{c}\times\overline{a}\}$$

3. $ABCD$ என்ற சமதள நாற்கரத்தின் வெக்டர் பரப்பு

$$= \tfrac{1}{2}\,\overline{AC}\times\overline{BD}.$$

4. $ABCD$ என்ற சமதள நாற்கரத்தின் முனைகளின் நிலை வெக்டர்கள் $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ எனில், நாற்கரத்தின் வெக்டர் பரப்பு

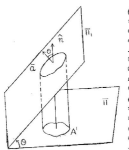
$$= \tfrac{1}{2}\{\overline{a}\times\overline{b}+\overline{b}\times\overline{c}+\overline{c}\times\overline{d}+\overline{d}\times\overline{a}\}$$

§ 6·02. வளைதளங்களின் பரப்புகளை வெக்டரால் குறித்தல்

ஒரு சமதளத்தில் அமைந்த பரப்பினை வெக்டரால் குறிக்கும் முறையை ஏற்கனவே விவரித்தோம். இனி, சமதளங்களால் அடைபடும் மூடிய அல்லது திறந்த மூவளவைத் திண்மங்களை (3-dimensional solids) எடுத்துக்கொள்வோம். எடுத்துக்காட்டாக ஒரு நான்முகி நான்கு தளங்களால் உருவாக்கப்பெற்ற, மூடிய திண்மம் (closed solid) ஆகும். மூடாத செவ்வக வடிவப் பெட்டி, திறந்த திண்மத் திற்கு எடுத்துக்காட்டாகும். இம்மாதிரி வகைகளில், ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் அமையும் பரப்பினை அப்பக்கத்திற்குச் செங்குத்தான, ஆனல் வெளிநோக்கிய வெக்டரால் குறிக்கிரேம். ஒவ்வொரு முறையும் பக்கங்களின் சுற்று வரையை இடஞ்சுழியாகவே சுற்றிவரவேண்டும். இவ்வாறு காணப்பட்ட வெக்டர் பரப்புகளின் கூட்டல்தான், அத்திண் மத்தின் புறப்பரப்பினைக் குறிக்கும் வெக்டராகும்.

திண்மத்தின் புறப்பரப்பு, சமதளங்களால் அடைபடாது, வளைதளங்களினால் (curved surfaces) அடைபடுமானால், அவ்வளைதளங்களை மிகச் சிறிய பல தளங்களாகப் பிரிப்பதாய்க் கொள்ளவேண்டும். பின்னர், அத்தளங்களைக் குறிக்கும் வெக்டர் பரப்புகளின் கூட்டல்தான் அவ்வளைதளப்பரப்பினைக் குறிக்கும் வெக்டர் பரப்பாகும்.

§ 6·03. ஒரு தளத்தின்மீது பல பரப்புகளின் விழல்களின் கூட்டல், அத்தளத்தின்மீது, அப்பரப்புகளைக் குறிக்கும் வெக்டர்களின் கூட்டலின் விழலுக்குச் சமம் ஆகும்



படம் 88.

π எனும் சமதளம் ஒன்றினுக்கு θ எனும் கோணச் சாய்வில் உள்ள π_1 எனும் தளம் ஒன்றில் அமையும் A எனும் பரப்பின் செங்குத்து விழல் πல் A' எனும் பரப்பானால், $A' = A \cos\theta$ என்பது நமக்குத் தெரியும். Aயினைக் குறிக்கும் வெக்டர் $\overline{a}$, A'ஐக் குறிக்கும் வெக்டர் $\overline{a_1}$ எனில், $\overline{a}$ என்பது π_1க்குச் செங்குத்தாகவும், $\overline{a_1}$ என்பது πக்குச் செங்குத்தாகவும் அமையும். πக்குச் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர் $\hat{n}$ என்க. அப்படியானால் $\overline{a}$க்கும் $\hat{n}$க்கும் இடைப்பட்ட கோணமும் θ ஆகும். எனவே பரப்பு Aயின் விழல் πல் $= A\cos\theta$

$$= \overline{a} \cdot \hat{n}$$

அதாவது $A' = \overline{a} \cdot \hat{n}$

எனவே A'ஐக் குறிக்கும் வெக்டர் $\overline{a_1} = (\overline{a} \cdot \hat{n})\hat{n}$. இதுபோன்றே πயுடன் φ, Ψ......எனும் கோணச் சாய்வுகளில் அமையும் π_2, π_3,...... என்ற தளங்களில் உள்ள B, C......என்ற பரப்புகளின் விழல்கள் முறையே $(\overline{b} \cdot \hat{n})\hat{n}$, $(\overline{c} \cdot \hat{n})\hat{n}$......எனும் வெக்டர்களால் குறிக்கப்படும். B, C......என்பவற்றைக் குறிக்கும் வெக்டர்கள் $\overline{b}$, $\overline{c}$,...... எனக் கொண்டால்,

$$\therefore \text{விழல்களின் கூட்டல்} = (\overline{a} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\overline{b} \cdot \hat{n})\hat{n} + (\overline{c} \cdot \hat{n})\hat{n} + \cdots\cdot$$
$$= (\overline{a} \cdot \hat{n} + \overline{b} \cdot \hat{n} + \overline{c} \cdot \hat{n} + \cdots\cdots)\hat{n}$$
$$= \{(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \cdots\cdots) \cdot \hat{n}\}\hat{n}$$

அதாவது கொடுக்கப்பட்ட பரப்புகளைக் குறிக்கும் வெக்டர்களின் கூட்டலின் விழலுக்குச் சமம் ஆகும்.

குறிப்பு (1) ஒரு தளத்திலிருந்து மற்றொரு தளத்திற்கு வீழச் செய்த பரப்பின் குறியீட்டைக் கீழ்க் கண்டவாறு நிர்ணயிக்கிறோம். ஒரு மூடிய அல்லது திறந்த திண்மத்தின் பக்கங்களின் பரப்பைக் குறிக்கும் வெக்டர்கள், வெளி முகமாய் வரையப்படுகின்றன ; இவ்வாறு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகளில் சில, எந்தத்தளத்தில் இப்பரப்புகளை வீழச் செய்கிறோமோ அதனின்றும் விலகிச் செல்வனவாய் அமைகின்றன ; சில அத்தளத்தை நோக்கிச் செல்வனவாய் அமைகின்றன. விலகிச் செல்வதுபோல் அமைந்த செங்குத்துக் கோடுகளையுடைய பக்கங்களின் பரப்புகளின் வீழல் மிகையாகவும் (+), தளம் நோக்கி அமையும் செங்குத்துக் கோடுகளையுடைய பக்கங்களின் பரப்புகளின் வீழல் குறையாகவும் (−) எடுத்துக் கொள்ளப்படும்.

2. ஒரு திறந்த பன்முகத் திண்மத்தின் புறப்பரப்பை (Polyhedral surface) வேறொரு தளம் ஈல் வீழச் செய்வதாய்க் கொள்வோம். அத்திண்மம் பல சம தளங்களால் உருவாக்கப் பெற்றது. அதன் திறந்த பக்கத்தில் அமையும் விளிம்புகள் ஒரு சமதளமில்லாத பலகோணத்தை (Skew polygon) உருவாக்கும். இந்நிலையில் முழுப் புறப்பரப்பின் வீழலும், அப்பலகோணத்தின் வீழலுக்குச் சமமாகும்.

§ 6·04. தேற்றம் : ஒரு மூடிய பன்முகத் திண்மத்தின் பக்கங்களின் வெக்டர் பரப்புகளின் கூட்டல் பூச்சிய மாகும்

π எனும் ஏதோவொரு தளத்தின்மீது பன்முகத்திண்மத்தின் முகங்களின் வெக்டர் பரப்புகளின் வீழல் காணவேண்டும் எனக் கொள்வோம். முகங்களின் வெக்டர் பரப்புகளைக் குறிக்கும் வெக்டர்கள் அத்தளங்களுக்குச் செங்குத்தாக வெளிநோக்கியிருக்கும். எனவே அவற்றில் சில முகங்களின் வெக்டர்கள் πயை நோக்கியும், சில πயிலிருந்து விலகிச் செல்வது போலவும் அமையும். அவ்வாறு தளத்தை நோக்கி அமையும் வெக்டர்களின் எண்ணிக்கை 'a' எனவும், தளத்திலிருந்து விலகிச்செல்லும் வெக்டர்களின் எண்ணிக்கை 'b' எனவும் கொள்க. இவ்வெக்டரால் குறிக்கப்பெறும் a முகங்களுக்கும் b முகங்களுக்கும் பொதுவான விளிம்புகள் ஒரு சமதளத்திலில்லா பலகோணத்தை உருவாக்கும். எனவே a முகங்களின் பரப்புகளின் வீழல்களின் மொத்தம், அப்பலகோணத்தின் வீழலுக்குச் சமம் ஆகும். இது −ஆக இருக்கும். மேலும், b முகங்களின் பரப்புகளின் வீழலின் மொத்தம், அதே பலகோணத்தின் வீழலுக்கு, அளவில்மட்டும் சமமாயிருக்கும். ஆனால் குறியீட்டில் +ஆக இருக்கும். எனவே மொத்த $a+b$ முகங்களின் பரப்புகளின் வீழல்களின் கூட்டல் அளவில் சமமான, ஆனால் குறியீட்டில் எதிரான இரு மதிப்புகளின் கூட்டலுக்குச் சமமாகிறது. எனவே அம்மதிப்பு பூச்சியமாகும். நாம் எடுத்துக்

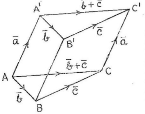
கொண்ட π எனும் தளம், நம் விருப்பிற்கேற்ப எடுத்த ஒன்றாகும். எனவே பன்முகத்திண்மத்தின் பக்கங்களின் பரப்புகளின் விழல் மொத்தம், எத்தளத்தில் விழச்செய்தாலும் பூச்சியமாகும் என்பது புலனாகிறது.

குறிப்பு: (i) திண்மங்களின் புறப்பரப்புகளை வெக்டர்களால் குறிக்க இயலுமாகையால், இரு திண்மங்களின் புறப்பரப்புகள் சமமானால், அவற்றைக் குறிக்கும் வெக்டர்கள் சமமாயிருக்க வேண்டும்.

(ii) ஒரு வளைதளத்தின் பரப்பினை, அதனைக் குறிக்கும் வெக்டருக்குச் செங்குத்தான ஒரு சமதளப் பரப்பினால் குறிக்கலாம்; இரண்டு பரப்புகளின் அளவும் சமமானதாய் அமையவேண்டும்.

(iii) ஒரு மூடிய வளைதளப் பரப்பினைக் குறிக்கும் வெக்டர் பூச்சியமாகும்.

§ 6·05. வெக்டர் பெருக்கல் பங்கீட்டு விதியைப் பின்பற்றுகிறது என நிறுவுதல்



படம் 89.

$\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$

வகை I. $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ என்பன ஒரே தள அமைவிலாதன என்க. $\overline{AB}=\overline{b}, \overline{BC}=\overline{c}$ $\overline{AA'}=\overline{a}$ என்க. ABC என்ற தளத்திற்கு இணையாக $A'\ B'\ C'$ என்ற தளம் அமையுமாறு ஒரு முப்பட்டை உருவம் (Prism) அமைத்துக் கொள்க.

$$\therefore\ A'B' = AB, \ \&\ A'B' \parallel AB. \quad \therefore\ \overline{A'B'} = \overline{AB} = \overline{b};$$

$$B'C' = BC, \ \&\ B'C' \parallel BC. \quad \therefore\ \overline{B'C'} = \overline{BC} = \overline{c};$$

$$A'C' = AC \ \&\ A'C' \parallel AC. \quad \overline{A'C'} = \overline{AC} = \overline{b}+\overline{c};$$

$$AA' = BB' = CC' \ \&\ AA' \parallel BB' \parallel CC'.$$

$$\therefore\ \overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{a};$$

இனி $\overline{AB}+\overline{BC} = \overline{AC}$;

i.e. $\overline{b}+\overline{c} = \overline{AC}$.

மேற்சொன்ன முப்பட்டை உருவிற்கு ஐந்து பக்கங்கள் உள்ளன. மூன்று இணைகரங்களும் இரண்டு முக்கோணங்களுமாக அமைந்துள்ளன.

ACB என்ற வெக்டர் பரப்பு $\frac{1}{2}\overline{c}\times\overline{b}$ என்ற வெக்டராலும்,
$A'B'C'$ என்ற வெக்டர் பரப்பு $\frac{1}{2}\overline{b}\times\overline{c}$ என்ற வெக்டராலும்,
$ABB'A'$ என்ற வெக்டர் பரப்பு $\overline{b}'\times\overline{a}$ என்ற வெக்டராலும்,
$CAA'C'$ என்ற வெக்டர் பரப்பு $\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})$ என்ற வெக்டராலும்,
$BCC'B'$ என்ற வெக்டர் பரப்பு $\overline{c}\times\overline{a}$ என்ற வெக்டராலும்

குறிக்கப் பெறும். இவை ஒவ்வொன்றும் வெளி முகமான, பரப்பிற்குச் செங்குத்துக் கோட்டு வெக்டரால் குறிக்கப்பெறும். ஆனால் பல முக உருவம் ஒன்றின் முகங்களின் வெக்டர் பரப்பின் கூட்டல் பூச்சியமாகும் என்ற விதியின்படி

$$\tfrac{1}{2}\overline{c}\times\overline{b}+\tfrac{1}{2}\overline{b}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{a}+\overline{c}\times\overline{a}+\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})=0$$

ஆனால் $\overline{b}\times\overline{c}=-\overline{c}\times\overline{b}$

$\therefore\ \overline{b}\times\overline{a}+\overline{c}\times\overline{a}+\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})=0$

i.e. $\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$.

வகை II

$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ ஒரே தள அமைப்புடையன என்க. அப்படியானால் $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ஆகியவை சர்வ சமமானவை.

$\therefore$ பரப்பு $ABB'A'$ + பரப்பு $BCC'B'$

= பரப்பு $ABB'A'$ + பரப்பு $BCC'B'$ − பரப்பு ABC + பரப்பு $A'B'C'$

= பரப்பு $ACC'A'$

i.e. $\overline{b}\times\overline{a}+\overline{c}\times\overline{a}=(\overline{b}+\overline{c})\times\overline{a}$

i.e. $\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$.

இவ்வாறு வெக்டர் பெருக்கல் பங்கீட்டு விதியைப் பின் பற்றுகிறது என்பது நிறுவப்படுகிறது.

§ 6·06. கன அளவுகள்

மூன்று வெக்டர்களின் திசையிலா அளவுருப் பெருக்கல் என்ற பகுதியிலேயே கீழ்க்கண்ட முடிவுகள் நிறுவப்பெற்றுள்ளன.

1. $OABC$ எனும் நான் முகியின் முனைகள் A, B, Cயின் நிலை வெக்டர்கள் Oவினை ஆதியாய்க் கொண்டு $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ எனில், அதன் கன அளவு $\frac{1}{6}\overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c})$ அல்லது $\frac{[\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}]}{6}$.

2. $ABCD$ என்ற நான்முகியின் முனைகள் $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ எனில், கன அளவு

$$= \frac{1}{6}\{[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}]+[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{d}]+[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}]-[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]\}$$

3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்ற வெக்டர்களை ஒரு புள்ளியிற் கூடும் மூன்று விளிம்புகளாகக் கொண்ட இணைவகத்திண்மத்தின் கன அளவு

$$= [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] \text{ அல்லது } [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}] \text{ அல்லது } [\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$$

4. A, B, C, D என்ற நான்கு புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ எனில் AB, AC, AD என்ற விளிம்புகளை உடைய இணைவகத்திண்மத்தின் கன அளவு

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}]+[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}]+[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{d}]-[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$$

பயிற்சி 6

1. $3i-j+k$, $-7i+3j+6k$, $6i+j+k$ என்ற நிலைவெக்டர்களுடைய புள்ளிகளை முனைகளாய்க் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்புக் காண்க.

2. $-3i+7j+4k$, $6i+5j-4k$, $2i-3j+7k$ என்ற புள்ளிகள் உருவாக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்புக் காண்க.

3. $-3i+5j+6k$, $6i+3j-5k$ என்ற வெக்டர்களை அண்டைப் பக்கங்களாய்க் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்புக் காண்க.

4. $5i-6j-7k$, $8i-9j-10k$ என்ற வெக்டர்களை அண்டைப் பக்கங்களாய்க் கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்புக் காண்க.

5. ஓர் இணைகரம் $ABCD$யின் மூன்று முனைகள் A, B, D முறையே $4i+5j-6k$, $5i+4j-6k$, $3i-2j-k$, என்ற நிலைவெக்டர்களால் குறிக்கப்பெற்றால் அதன் வெக்டர் பரப்பினைக் காண்க.

6. ஒரு நாற்கரத்தின் முனைகளின் நிலைவெக்டர்கள் $-4i+6j+k$; $2i+9j-5k$, $2i+2j+5k$, $3i+7j+7k$ எனில் அதன் பரப்பு என்ன?

7. $-3i+8j-5k$, $-i+4j+3k$, $3i-2j+5k$, $3i+2j+k$ என்ற நிலைவெக்டருடைய புள்ளிகளால் உருவாக்கப்பெறும் நாற்கரத்தின் பரப்பு என்ன?

8. $i+2j-k$, $3i-4j+7k$, $-i+2j-3k$, $4i+5j-k$ என்ற புள்ளிகள் உருவாக்கும் நாற்கரத்தின் வெக்டர் பரப்பு என்ன?

9. $ABCD$ எனும் நாற்கரத்தில் $\overline{AB}=\vec{b}$, $\overline{AD}=\vec{d}$, $\overline{AC}=p\vec{b}+q\vec{d}$ எனில் நாற்கரத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2}\,|(p+q)(\vec{b}\times\vec{d})|$ என நிறுவுக.

10. ஒரு சரிவகத்தில் இணையில்லாத பக்கங்களில் ஒன்றின் நடுப் புள்ளியை எதிர்ப் பக்கத்தின் முனைகளுக்குச் சேர்ப்பதால் கிடைக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பு, சரிவகப்பரப்பில் பாதி என நிறுவுக.

11. ஒரு சாய்சதுரத்தின் முனைகள் $i-j+k$, $5i-5j+4k$, $5i+8k$; $i+4j+5k$ எனில் அதன் பரப்பு என்ன ?

12. ஒரு சதுரத்தின் முனைகள் $-5i+6j+8k$, $i+8j+11k$, $4i+2j+9k$, $-2i+6k$ எனில் அதன் பரப்பு என்ன ?

13. A, B, C, D என்ற நான்முகியின் முனைகள் முறையே $(0, 1, 2)$, $(3, 0, 1)$, $(4, 3, 6)$, $(4, 6, 4)$ எனில் அதன் கனஅளவு என்ன ?

14. $(4, 0, 1)$, $(5, 4, 0)$, $(6, 2, 2)$, $(3, 2, -1)$ என்ற முனைகளைக் கொண்ட நான்முகியின் கன அளவு என்ன ? முடிவுக்கு விளக்கம் கூறுக.

15. $(-4, 4, 4)$, $(0, -1, -1)$, $(3, 9, 4)$, $(4, 5, 1)$ எனும் புள்ளிகள் ஒரு சமதளத்தில் அமைகின்றன என நிறுவுக.

16. $(4, -1, -3)$ $(10, 1, -6)$, $(7, 7, -4)$ $(1, 5, -1)$ என்ற நான்கு புள்ளிகளும் உருவாக்கும் நான்முகியின் கன அளவு என்ன ? முடிவை விளக்கு.

17. செவ்வகத் திண்மம் ஒன்றின் ஒரு முனையிற்கூடும் விளிம்புகள் $2i+3j-k$, $2i+2j+10k$, $16i-11j-k$ எனில், அதன் கன அளவு என்ன ?

18. $i-2j+2k$, $2i+2j+k$, $2i-j-2k$ எனும் ஒரு முனையிற் கூடும் விளிம்புகளையுடைய ஒரு கன சதுரத்தின் கன அளவு என்ன ?

19. $\overline{a} = 4i-8j+k$, $\overline{b} = 2i-j-2k$, $\overline{c} = 3i-4j+12k$ எனும் வெக்டர்களை ஒரு முனையிற்கூடும் விளிம்புகளாய் உடைய பெட்டியின் கன அளவைக் காண்க. (B.S.c. து. பா. ஏப். '69)

7. வெக்டர் நுண்கணிதம்
(Vector Calculus)

வகை நுண்கணிதம்
(Differential Calculus)

§ 7·01. ஒரு திசையிலி மாறியின் வெக்டர் சார்பு

V எனும் வெக்டர், ஒரு திசையிலி மாறி tயின் மாறுதல்களுக்கேற்ப, தானும் மாறுமானல், அதனை அத்திசையிலிமாறியின் வெக்டர் சார்பு என்கிருேம். எடுத்துக் காட்டாக, ஒரு நகரும் புள்ளியின் நிலையை, ஏதேனும் ஒரு நேரம் 't'யின் குறிக்கும் நிலைவெக்டர் $\bar{r}$ எனில், அவ்வெக்டர், நேரம் எனும் மாறி tயின் வெக்டர் சார்பாகும். இது போன்றே ஒரு நகரும் புள்ளியின் இயங்கு வரையைக் குறிக்கும் சமன்பாடும் ஒரு வெக்டர் சார்பாக எழுத இயலும். எடுத்துக் காட்டாக,

$$\bar{r} = (a \cos \theta)\, i + (b \sin \theta)\, j + (0)\, k$$

எனும் சமன்பாடு ஒரு நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடாகும், இதில் θ என்பது ஒரு திசையிலிமாறி. இதனைச் சார்ந்து $\bar{r}$ அமைவதால், $\bar{r}$, θவின் வெக்டர் சார்பாகும். இதுபோன்றே,

$\bar{r} = (at^2)i + (2at)j + (0)k$; என்பது ஒரு பரவளையத்தினையும் (Parabola),

$\bar{r} = (ct)i + \left(\frac{c}{t}\right)j + (0)k$ என்பது ஒரு செவ்வக அதிபரவளையத்தினையும் (Rectangular hyperbola) குறிக்கும் சமன்பாடுகளாகும்.

இவ்வாறு ஒரு திசையிலிமாறியின் சார்பாக அமைகின்ற வெக்டரை, சாதாரண சார்புக் குறியீட்டு முறையிலேயே $\bar{r} = \bar{f}(t)$ எனக் குறிப்பது உண்டு.

't'ன் ஒரு மதிப்புக்குத்தக, $\overline{r}$க்கு ஒரு மதிப்பு மட்டிலுமே கொடுக்கும் சார்பு ஒரு மதிப்புடைய சார்பு (one valued function) எனப்படும்).

சாதாரண நுண்கணிதத்தில் வரையறுப்பது போன்றே வெக்டர் சார்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியான சார்பாக இருக்க வரையறை கூறப்படும். சார்புகளின் எல்லை காண்பதுவும், திசையிலி நுண்கணிதத்தில் உள்ளது போன்ற முறைகளிலேயே காணப்படும்.

§ 7·02. வெக்டரின் வகைக் கெழுகாணல் (Differentiation of a vector)

$\overline{r} = \overline{f}(t)$ என்பது திசையிலிமாறி tயின் வெக்டர் சார்பு என்க. இது தொடர்ச்சியானதாயும், tன் ஒரு மதிப்புக்குத் தக, $\overline{r}$க்கு ஒரு மதிப்பு மட்டிலுமே கொடுக்கும் ஒரு மதிப்புடைய சார்பு என்பதாயும் கொள்வோம். t எனும் மாறி $t+\Delta t$ என மாறும் போது $\overline{r}$ என்பது $\overline{r}+\Delta\overline{r}$ எனமாறும் எனக் கொள்வோம். அப்படியானால்,

$$\frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t} = \frac{\overline{f}(t+\Delta t)-\overline{f}(t)}{\Delta t} \text{ என்றாகும்.}$$

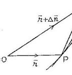
எனவே திசையிலா அளவுருக்களின் நுண்கணிதத்தில் வரையறை செய்தது போன்றே ஒரு வெக்டரின் வகைக் கெழுவையும் வரையறுக்க இயலும். அதாவது

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \underset{\Delta t\to 0}{Lt}\ \frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t} = \underset{\Delta t\to 0}{Lt}\ \frac{\overline{f}(t+\Delta t)-\overline{f}(t)}{\Delta t}$$

எனும் எல்லை மதிப்புக் காண இயலுமாயின், அதனைத்தான் $\overline{r}$ன் tஐப் பொறுத்தவகைக் கெழு என்கிறோம். மேலும் $\frac{d\overline{r}}{dt}$ யின் மதிப்பும் tயினைச் சார்ந்திருக்கக் கூடும். ஆகையால் $\frac{d\overline{r}}{dt}$ யின் வகைக்கெழு tஐப் பொறுத்துக் கண்டால், அது

$\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}$ எனக் குறிக்கப்பெறும். இது போன்றே இதைவிட உயர் வரிசை வகைக் கெழுக்களையும் வரையறுத்து $\frac{d^3\overline{r}}{dt^3}$, $\frac{d^4\overline{r}}{dt^4}$ ......என எழுத இயலும்.

§ 7·03. ஒரு நகரும் புள்ளியின் திசைவேகம்



படம் 90.

t எனும் குறித்த நேரத்தில் ஒரு துகள் $\bar{r}$ எனும் நிலைவெக்டருடைய புள்ளி Pயிலும், $t+\Delta t$ எனும் நேரத்தில் $\bar{r}+\Delta\bar{r}$ என்ற நிலைவெக்டருடைய புள்ளி Qவிலும் இருப்பதாய்க் கொள்வோம்.

அப்படியானால்,

$$\overline{OP}+\overline{PQ} = \overline{OQ} \text{ என்பதனால்,}$$
$$\bar{r}+\overline{PQ} = \bar{r}+\Delta\bar{r}$$
$$\therefore \quad \overline{PQ} = \Delta\bar{r}.$$

எனவே $\dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$ என்ற மதிப்பு ஒரு வெக்டராகும். அது $\overline{PQ}$வின் திசையில் அமைகிறது. Δt பூச்சியத்தை நெருங்குகையில் $\Delta\bar{r}$ம் பூச்சியத்தை நெருங்கும். Q எனும் புள்ளி Pயை நெருங்கும். அதாவது நாண் PQ, துகளின் பாதைக்குப் Pயில் வரையப்படும் தொடுகோட்டினை நெருங்கி, முடிவில் அதனுடன் ஒன்றும். எனவே $\dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$ என்பதன் எல்லை மதிப்பு, ஒரு வெக்டர் என்பதும், அது துகளின் பாதைக்கு Pயில் வரையப்படும் தொடுகோட்டின் திசையில் அமையும் என்பதும் வெளிப்படை.

$\underset{\Delta t\to 0}{Lt}\dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$ என்பது மெய் மதிப்பாகக் கிடைக்குமானால், அதனைத் தான் $\bar{r}$ன் tஐப் பொறுத்த வகைக்கெழு என்கிறோம். அதனை $\dfrac{d\bar{r}}{dt}$ எனக் குறிக்கிறோம். மேலும் $\dfrac{d\bar{r}}{dt}$ என்பது $\bar{r}$ன் மாற்றம் என்ன விகிதத்தில் நிகழ்கிறது என்பதைக் காட்டும். அதுவே அத்துகளின் திசைவேகமாகும். இதனைச் சுருக்கமாக $\dot{\bar{r}}$ எனக் குறிப்பர். இது போன்றே $\dot{\bar{r}}$ன் வகைக்கெழு tஐப் பொறுத்துக் கண்டால் அதனை $\ddot{\bar{r}}$ எனக் குறிப்பதுண்டு.

$\bar{r}$ என்ற வெக்டரை அதன் கூறுகளாய்ப் பிரித்து எழுதினால் $\bar{r} = xi+yj+zk$ என ஆகும். இதில் வரும் x, y, z என்பன மூவளவை ஆயங்களின் திசையில் இவ்வெக்டரின் கூறுகளின் எண்ணளவுகளாகும். எனவே $\bar{r}$, tயின் சார்பானால், x, y, zகளும் tயின் சார்புகளாகும். எனவே tயானது $t+\Delta t$ என்று மாறுகையில் x, y, zகளும் $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ என மாறும்.

$$\therefore\ \bar{r}+\Delta\bar{r} = (x+\Delta x)\,i+(y+\Delta y)\,j+(z+\Delta z)\,k$$

$$\therefore\ \Delta\bar{r} = \Delta x i+\Delta y j+\Delta z k$$

$$\therefore\ \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\,i+\frac{\Delta y}{\Delta t}\,j+\frac{\Delta z}{\Delta t}\,k$$

எனவே $\underset{\Delta t\to 0}{Lt}\ \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \underset{\Delta t\to 0}{Lt}\ \frac{\Delta x}{\Delta t}\,i+\underset{\Delta t\to 0}{Lt}\ \frac{\Delta y}{\Delta t}\,j+\underset{\Delta t\to 0}{Lt}\ \frac{\Delta z}{\Delta t}\,k$

i.e. $\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,i+\frac{dy}{dt}\,j+\frac{dz}{dt}\,k$

எனவே $\bar{r}$ன் முதலாவது வகைக் கெழுவின் கூறுகள், $\bar{r}$ன் கூறுகளின் முதலாவது வகைக் கெழுக்களின் கூட்டல் ஆகும். இதனை விரிவு படுத்தினல் $\frac{d\bar{r}}{dt}$ என்ற வெக்டரின் கூறுகள் $i\,\frac{dx}{dt},\ j\,\frac{dy}{dt},\ k\,\frac{dz}{dt}$; எனவே $\frac{d\bar{r}}{dt}$ன் வகைக் கெழுவின் கூறுகள் $i\,\frac{d^2x}{dt^2},\ j\,\frac{d^2y}{dt^2},\ k\,\frac{d^2z}{dt^2}$ என்ருகும்.

அதாவது $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = i\,\frac{d^2x}{dt^2}+j\,\frac{d^2y}{dt^2}+k\,\frac{d^2z}{dt^2}$

இதுபோன்றே, $\frac{d^3\bar{r}}{dt^3} = i\,\frac{d^3x}{dt^3}+j\,\frac{d^3y}{dt^3}+k\,\frac{d^3z}{dt^3}$

....

என எழுதலாம்.

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ எனும் ஒருதள அமைவிலா வெக்டர்களின் சேர்க்கையாக $\bar{r}$ எழுதப் பெற்ருலும், மேற்சொன்ன மாதிரியான முடிவு நிறுவலாம்.

அதாவது, $\bar{r} = l\bar{a}+m\bar{b}+n\bar{c}$ என்ருலும்,

$$\frac{d^p\bar{r}}{dt^p} = \frac{d^pl}{dt^p}\,\bar{a}+\frac{d^pm}{dt^p}\,\bar{b}+\frac{d^pn}{dt^p}\,\bar{c} \text{ ஆகும்.}$$

§ 7·04. பகுதி வகைக் கெழுக்கள் (Partial Derivatives)

$\bar{V}$ என்பது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட திசையிலி மாறிகளின் வெக்டர் சார்பானல், $\bar{V}$யின் வகைக் கெழுக்கள் ஒவ்வொரு மாறியைப் பொறுத் தும் காண இயலும். அவ்வாறு காணும் போது மற்ற மாறிகளை மாறிலி களாய்க் கருத வேண்டும். இவ்வாறு காணப்பட்ட வகைக் கெழுக்கள் பகுதி வகைக் கெழுக்கள் எனப்படும். எடுத்துக் காட்டாக,

$\bar{V} = \bar{f}\,(x,\,y,\,z)$ என்ருல்,

$$\frac{\partial\bar{V}}{\partial x} = \underset{\Delta x\to 0}{Lt}\ \frac{\bar{f}\,(x+\Delta x,\,y,\,z)-\bar{f}\,(x,\,y,\,z)}{\Delta x}$$

இதேபோல் $\frac{\partial \overline{V}}{\partial y} = \underset{\Delta y \to 0}{Lt} \frac{\overline{f}(x, y+\Delta y, z) - \overline{f}(x, y, z)}{\Delta y}$;

மேலும் $\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} = \underset{\Delta z \to 0}{Lt} \frac{\overline{f}(x, y, z+\Delta z) - \overline{f}(x, y, z)}{\Delta z}$.

சாதாரண திசையிலி மாறி நுண்கணிதத்தில் உள்ளது போன்று உயர் வரிசை (higher order) பகுதிவகைக் கெழுக்களை வரையறுக்கலாம்.

$\overline{V}$ எனும் சார்புக்குத் தொடர்ச்சியான (continuous) இரண்டாவது வரிசை பகுதி வகைக் கெழு இருக்குமானால்,

$\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial y \partial x}$ எனும் சமன்பாடு உண்மையாகும். அதாவது எந்த மாறியைப் பொறுத்து முதலில் வகைக் கெழுகாண்பது, எதைப் பொறுத்து இரண்டாவதாய் வகைக் கெழு காண்பது என்று ஒழுங்கு முறை தேவையில்லை. எதைப் பொறுத்து வேண்டுமாயினும் முதலில் பகுதி வகைக் கெழு கண்டு, அதன்பின், அடுத்த மாறியைப் பொறுத்த பகுதி வகைக் கெழு காணலாம். இரண்டு மதிப்புகளும் சமமாயிருக்கும்.

§ 7·05. வகைக் கெழு காணல்: திட்ட வடிவங்கள் (Standard forms)

1. மாறிலி வெக்டரின் வகைக் கெழு பூச்சியமாகும். திசையிலும் அளவிலும் மாறுத வெக்டர் மாறிலி வெக்டராகும்; திசையோ, அளவோ ஒன்று மாறினாலும் அது மாறி வெக்டராகும். எனவே, tயானது $t+\Delta t$ என மாறும்போதும் $\overline{r}$ எவ்வகையிலும் மாறுது. எனவே $\Delta \overline{r} = 0$;

$$\therefore \quad \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta t} = 0. \quad \text{i.e.} \quad \frac{d\overline{r}}{dt} = 0.$$

2. இரு வெக்டர்களின் கூட்டலின் வகைக் கெழு:

$\overline{r}$, $\overline{s}$ என்பன tஐப் பொறுத்து வகைக் கெழு காணத்தக்க (differentiable) இரு சார்புகள் எனில் $\overline{F} = \overline{r} + \overline{s}$ என்ற வெக்டர் கூட்டலின் வகைக் கெழு $\frac{d\overline{F}}{dt} = \frac{d\overline{r}}{dt} + \frac{d\overline{s}}{dt}$ ஆகும்.

ஏனெனில் tயானது $t+\Delta t$ என மாறுகையில், $\overline{r}$ம் $\overline{s}$ம் முறையே $\overline{r}+\Delta\overline{r}$, $\overline{s}+\Delta\overline{s}$ என மாற்றங்கள் அடையும். $\overline{F}$ல் ஏற்படும் மாற்றம் $\Delta\overline{F}$ எனில்,

$$\overline{F}+\Delta\overline{F} = \overline{r}+\Delta\overline{r}+\overline{s}+\Delta\overline{s}$$

$$\therefore \quad \Delta\overline{F} = \Delta\overline{r}+\Delta\overline{s}$$

$$\therefore \quad \frac{d\overline{F}}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{Lt}\frac{\Delta\overline{F}}{\Delta t} = \underset{\Delta t \to 0}{Lt}\frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t} + \underset{\Delta t \to 0}{Lt}\frac{\Delta\overline{s}}{\Delta t}$$

$$= \frac{d\overline{r}}{dt}+\frac{d\overline{s}}{dt}.$$

அதாவது இரு வெக்டர்களின் கூட்டலின் வகைக் கெழு = தனித் தனி வெக்டர்களின் வகைக் கெழுக்களின் கூட்டல். இதனை விரிவு படுத்தி, 'எத்தனை வெக்டர்களின் கூட்டலாயினும், மொத்தத்தின் வகைக் கெழு, தனித்தனி வகைக் கெழு தனித்தனி வகைக் கெழுக் களின் கூட்டலுக்குச் சமம்' என நிறுவலாம்.

3. சாரபின் சார்பை வகைக்கெழு காணல் (Differentiation of function of a function):

$\overline{r}$ என்பது s எனும் திசையிலி மாறியின் சார்பு எனவும் s, ஆனது t எனும் வேறொரு திசையிலி மாறியின் சார்பு எனவும் கொண்டால், tயில் ஏற்படும் மாற்றம் Δtக்குத்தக, sல் Δs எனவும், $\overline{r}$ல் $\Delta\overline{r}$ எனவும் மாற்றங்கள் நிகழக்கூடும்.

$$\text{எனவே } \frac{d\overline{r}}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{Lt}\frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t} = \underset{\Delta t \to 0}{Lt}\left(\frac{\Delta\overline{r}}{\Delta s}\right)\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

$$= \left(\underset{\Delta s \to 0}{Lt}\frac{\Delta\overline{r}}{\Delta s}\right)\left(\underset{\Delta t \to 0}{Lt}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

$$= \frac{d\overline{r}}{ds}\,\frac{ds}{dt} \text{ ஆகும்.}$$

(திசையிலி நுண்கணிதத்தில் சார்பின் சார்புக்கு வகைக்கெழு காணும் முறையிலேயே இங்கும் அமைந்திருப்பது காண்க.)

4. திசையிலியும் வெக்டரும் பெருக்கிய பெருக்கலுக்கு வகைக்கெழு காணல் :

s என்பது ஒரு திசையிலி எனவும் $\overline{r}$ என்பது ஒரு வெக்டர் எனவும் கொள்க. இவ்விரண்டும் 't' எனும் திசையிலி மாறியின் சார்புகள் என்க. அவ்வாறுயின்,

$\overline{F} = s\overline{r}$ என்பதும் tன் சார்பு ஆகும்.

t யானது $t+\Delta t$ என மாறினுல், s என்பது $s+\Delta s$ எனவும், $\overline{r}$ ஆனது $\overline{r}+\Delta\overline{r}$ எனவும், $\overline{F}$ ஆனது $\overline{F}+\Delta\overline{F}$ எனவும் மாறும்.

$$\therefore \frac{d\overline{F}}{dt} = \underset{\Delta t\to o}{Lt} \frac{\Delta \overline{F}}{\Delta t} = \underset{\Delta t\to o}{Lt} \frac{\{(s+\Delta s)(\overline{r}+\Delta\overline{r})-s\overline{r}\}}{\Delta t}$$

$$= \underset{\Delta t\to o}{Lt} \frac{s(\Delta\overline{r})+(\Delta s)\overline{r}+(\Delta s)(\Delta\overline{r})}{\Delta t}$$

$$= s\underset{\Delta t\to o}{Lt} \frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t} + \overline{r}\underset{\Delta t\to o}{Lt} \frac{\Delta s}{\Delta t} + \underset{\Delta t\to o}{Lt} \frac{\Delta s}{\Delta t}\Delta\overline{r}$$

$$= s\frac{d\overline{r}}{dt} + \overline{r}\frac{ds}{dt}.$$

5. புள்ளிப் பெருக்கல், வெக்டர் பெருக்கல்களின் வகைக்கெழு காணல்.

$\overline{U}$, $\overline{V}$, என்பன t எனும் திசையிலி மாறியின் சார்புகள் என்க. $\overline{U}\cdot\overline{V}$ என்பது திசையிலி மதிப்பாகும்.

$r = \overline{U}\cdot\overline{V}$ என்க.

t யானது $t+\Delta t$ யானல் $r+\Delta r = (\overline{U}+\Delta\overline{U})\cdot(\overline{V}+\Delta\overline{V})$

$$\therefore \Delta r = (\overline{U}+\Delta\overline{U})\cdot(\overline{V}+\Delta\overline{V})-\overline{U}\cdot\overline{V}.$$

$$= \overline{U}\cdot\overline{V}+\overline{U}\cdot\Delta\overline{V}+\overline{V}\cdot\Delta\overline{U}+\Delta\overline{U}\cdot\Delta\overline{V}-\overline{U}\cdot\overline{V}$$

$$= \overline{U}\cdot\Delta\overline{V}+\overline{V}\cdot\Delta\overline{U}+\Delta\overline{U}\cdot\Delta\overline{V}.$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = \underset{\Delta t\to o}{Lt} \frac{\Delta r}{st} = \underset{\Delta t\to o}{Lt} \frac{\overline{U}\cdot\Delta\overline{V}}{t\Delta} + \underset{\Delta t\to o}{Lt} \frac{\overline{V}\cdot\Delta\overline{U}}{\Delta t}$$

$$+ \underset{\Delta t\to o}{Lt} \frac{\Delta\overline{U}\cdot\Delta\overline{V}}{\Delta t}$$

$$= \overline{U}\cdot\frac{d\overline{V}}{dt} + V\cdot\frac{d\overline{U}}{dt}.$$

இதே போன்று, வெக்டர்கள் எழுதப்படும் வரிசை முறையை மாற்றாமல் ஆராய்ந்தால்,

$$\frac{d}{dt}(\overline{U}\times\overline{V}) = \frac{d\overline{U}}{dt}\times\overline{V}+\overline{U}\times\frac{d\overline{V}}{dt}$$ எனக் கிடைக்கும்.

மேலும் $\frac{d}{dt}\{\overline{a}\cdot\overline{b}\times\overline{c}\} = \frac{d\overline{a}}{dt}\cdot\overline{b}\times\overline{c}+\overline{a}\cdot\frac{d\overline{b}}{dt}\times\overline{c}+\overline{a}\cdot\overline{b}\times\frac{d\overline{c}}{dt}$

$$\frac{d}{dt}\{\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})\} = \frac{d\overline{a}}{dt}\times(\overline{b}\times\overline{c})+\overline{a}\times\left(\frac{d\overline{b}}{dt}\times\overline{c}\right)+\overline{a}\times\left(\overline{b}\times\frac{d\overline{c}}{dt}\right)$$

எனவும் நிரூபிக்கலாம்.

குறிப்பாக $\dfrac{d}{dt}(\overline{r}\cdot\overline{r}) = \dfrac{d\overline{r}}{dt}\cdot\overline{r}+\overline{r}\cdot\dfrac{d\overline{r}}{dt}$

$$= 2\overline{r}\cdot\frac{d\overline{r}}{dt}.$$

அதாவது $\dfrac{d}{dt}(\overline{r})^2 = 2\overline{r}\cdot\dfrac{d\overline{r}}{dt}$

$\overline{r}$ என்பதன் எண்ணளவு மாறிலியானால் $|r|=k$, ஒரு மாறிலி என்க.

$\therefore\ \overline{r}^2 = k^2$ ஒரு மாறிலி

$\therefore$ இதன் வகைக் கெழு $2\overline{r}\cdot\dfrac{d\overline{r}}{dt}=0$

அதாவது $\overline{r}$ம், அதன் வகைக் கெழுவும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும். அதாவது எண்ணளவு மாறிலியாய் அமையப்பெற்ற வெக்டரின் வகைக் கெழுவாகிய வெக்டர், கொடுக்கப்பட்ட வெக்டருக்கே செங்குத்தாயிருக்கும் என்பது புலனாகிறது.

மேலும் $\dfrac{d}{dt}(\overline{a}\times\overline{b}) = \dfrac{d\overline{a}}{dt}\times\overline{b}+\overline{a}\times\dfrac{d\overline{b}}{dt}$

எனவே $\dfrac{d}{dt}\left(\overline{a}\times\dfrac{d\overline{a}}{dt}\right) = \dfrac{d\overline{a}}{dt}\times\dfrac{d\overline{a}}{dt}+\overline{a}\times\dfrac{d^2\overline{a}}{dt^2}$

$$= \overline{a}\times\frac{d^2\overline{a}}{dt^2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 1 : $\overline{r} = (t^3)i+(\sin^2 t)j+(1-t)k$ எனில் $\dfrac{d\overline{r}}{dt}, \dfrac{d^2\overline{r}}{dt^2}$ ஆகியவற்றின் மதிப்பு என்ன?

$$\overline{r} = it^3+j\sin^2 t+k(1-t)$$

$$\therefore\ \frac{d\overline{r}}{dt} = i3t^2+(2\sin t\cos t)j-k$$

$$= (3t^2)\,i+(\sin 2t)\,j-k$$

$$\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = (6t)\,i+(2\cos 2t)j-0$$

$$= (6t)\,i+(2\cos 2t)j.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 : $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ என்பன நிலை வெக்டர்களாயின் $\overline{r}=\overline{a}t^2+\overline{b}t+\overline{c}$ என்பது மாறிலியான முடுக்கத்துடன் நகரும் ஒரு புள்ளியின் பாதை எனக் காண்பி.

$$\overline{r} = \overline{a}t^2+\overline{b}t+\overline{c};$$

$$\therefore\ \frac{d\overline{r}}{dt} = 2\overline{a}t+\overline{b}$$

மேலும் $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = 2\bar{a}$. அதாவது புள்ளியின் முடுக்கம் மாறிலி மதிப் பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 : $\bar{r} = \bar{a}\cos\omega t + \bar{b}\sin\omega t$ எனும் தொடர்பால் $\bar{a}, \bar{b}, \omega$ என்பன மாறிலிகள் எனில் $\bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt} = \omega\bar{a}\times\bar{b}$; $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} + \omega^2\bar{r} = 0$ என நிறுவுக.

$$\bar{r} = \bar{a}\cos\omega t + \bar{b}\sin\omega t$$

$$\therefore\ \frac{d\bar{r}}{dt} = -\bar{a}\omega\sin\omega t + \bar{b}\omega\cos\omega t \quad (\because \bar{a}, \bar{b}, \omega \text{ மாறிலிகள்})$$

$$\therefore\ \bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt} = (\bar{a}\cos\omega t + \bar{b}\sin\omega t)\times(-\bar{a}\sin\omega t + \bar{b}\cos\omega t)\omega$$

$$= \omega\{\bar{a}\times\bar{b}\cos^2\omega t - \bar{b}\times\bar{a}\sin^2\omega t\}$$

$$= \omega\{\bar{a}\times\bar{b}\cos^2\omega t + \bar{a}\times\bar{b}\sin^2\omega t\}$$

$$= \omega\,\bar{a}\times\bar{b}.$$

மேலும் $$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\bar{a}\omega^2\cos\omega t - \bar{b}\omega^2\sin\omega t$$

$$= -\omega^2(\bar{a}\cos\omega t + \bar{b}\sin\omega t)$$

$$= -\omega^2\bar{r}$$

$$\therefore\ \frac{d^2\bar{r}}{dt} + \omega^2\bar{r} = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 4 : $\frac{d\bar{a}}{dt} = \bar{W}\times\bar{a}$; $\frac{d\bar{b}}{dt} = \bar{W}\times\bar{b}$ எனில் $\frac{d}{dt}(\bar{a}\times\bar{b}) = \bar{W}\times(\bar{a}\times\bar{b})$ எனக் காண்பி.

$$\frac{d}{dt}(\bar{a}\times\bar{b}) = \frac{d\bar{a}}{dt}\times\bar{b} + \bar{a}\times\frac{d\bar{b}}{dt}$$

$$= (\bar{W}\times\bar{a})\times\bar{b} + \bar{a}\times(\bar{W}\times\bar{b})$$

$$= (\bar{W}\cdot\bar{b})\bar{a} - (\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{W} + (\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{W} - (\bar{a}\cdot\bar{W})\bar{b}$$

$$= (\bar{W}\cdot\bar{b})\bar{a} - (\bar{a}\cdot\bar{W})\bar{b}$$

$$= \bar{W}\times(\bar{a}\times\bar{b})$$

எடுத்துக்காட்டு 5 : கீழ்க்கண்ட சார்புகளில் $\bar{r}$ன் எண்ணளவு r எனவும், அது t எனும் திசையிலி மாறியின் சார்பு எனவும் மற்றவை

மாறிலிகள் எனக் கொண்டும் tஐப் பொறுத்த வகைக் கெழுக்கள் காண்க.

(i) $r^2\bar{r}+(\bar{c}\cdot\bar{r})\bar{d}$ (ii) $(r\bar{c}+b\bar{r})^2$ (iii) $K\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2$

(iv) $r^2+\frac{1}{r^2}$; (v) $r^2\bar{r}+\bar{c}\times\frac{d\bar{r}}{dt}$ (vi) $\frac{\bar{r}}{r^2}+\frac{r\bar{b}}{a\bar{r}}$

(i) $\frac{d}{dt}\{r^2\bar{r}+(\bar{c}\cdot\bar{r})\bar{d}\} = \frac{d}{dt}(r^2\bar{r})+\frac{d}{dt}\{(\bar{c}\cdot\bar{r})\bar{d}\}$

$$= \left\{\frac{d}{dt}(\bar{r}^2)\right\}\bar{r}+r^2\frac{d\bar{r}}{dt}+\left\{\frac{d}{dt}(\bar{c}\cdot\bar{r})\right\}\bar{d}+(\bar{c}\cdot\bar{r})\frac{d}{dt}(\bar{d})$$

$$= 2r\frac{dr}{dt}\bar{r}+r^2\frac{d\bar{r}}{dt}+\left(\bar{c}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}\right)\bar{d}\left\{\because \frac{d}{dt}(\bar{c}) = 0 = \frac{d(\bar{d})}{dt}\right\}$$

(ii) $\frac{d}{dt}\{r\bar{c}+b\bar{r}\}^2$

$$= \frac{d}{dt}\{r^2\bar{c}^2+\bar{b}^2\bar{r}^2+2br\,\bar{c}\cdot\bar{r}\}$$

$$= 2r\frac{dr}{dt}\bar{c}^2+\bar{b}^2 2\bar{r}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}+2b\frac{dr}{dt}(\bar{c}\cdot\bar{r})+2br\left(\bar{c}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}\right)$$

$$= \left(2r\frac{dr}{dt}\right)\bar{c}^2+2\bar{b}\left\{\frac{dr}{dt}(\bar{c}\cdot\bar{r})+r\left(\bar{c}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}\right)\right\}+2\bar{b}^2\bar{r}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}$$

(iii) $\frac{d}{dt}\left\{K\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2\right\} = K\frac{d}{dt}\left\{\frac{d\bar{r}}{dt}\right\}^2$

$$= K\,2\frac{d\bar{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

(iv) $r^2+\frac{1}{r^2} = \bar{r}\cdot\bar{r}+(\bar{r}\cdot\bar{r})^{-1}$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right) = \frac{d}{dt}(\bar{r}\cdot\bar{r})+\frac{d}{dt}(\bar{r}\cdot\bar{r})^{-1}$$

$$= 2\bar{r}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}+(-1)(\bar{r}\cdot\bar{r})^{-2}\cdot\left\{2\bar{r}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}\right\}$$

$$= 2\bar{r}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}\left\{1-\frac{1}{r^4}\right\}$$

$$= 2\bar{r}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt} - 2r\frac{dr}{dt}\frac{1}{r^4} \quad \left\{\because \bar{r}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt} = r\frac{dr}{dt}\right\}$$

$$= 2\bar{r}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt} - \frac{2}{r^3}\frac{dr}{dt}$$

(v) $\frac{d}{dt}\left\{r^2\bar{r} + \bar{c}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\right\}$

$$= \frac{d}{dt}(r^2\bar{r}) + \frac{d}{dt}\left(\bar{c}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\right)$$

$$= 2r\frac{dr}{dt}\bar{r} + r^2\frac{d\bar{r}}{dt} + \bar{c}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \quad \left\{\because \frac{d\bar{c}}{dt} = 0\right\}$$

$$= 2r\bar{r}\frac{dr}{dt} + r^2\frac{d\bar{r}}{dt} + \bar{c}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

(vi) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{r}}{r^2} + \frac{r\bar{b}}{\bar{a}\cdot\bar{r}}\right)$

$$= \frac{d\bar{r}}{dt}\frac{1}{r^2} + \bar{r}(-2)\frac{1}{r^3}\frac{dr}{dt} + \frac{d}{dt}(r\bar{b})\frac{1}{(\bar{a}\cdot\bar{r})}$$

$$+ (r\bar{b})(-1)(\bar{a}\cdot\bar{r})^{-2}\frac{d}{dt}(\bar{a}\cdot\bar{r})$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{d\bar{r}}{dt} - \frac{2\bar{r}}{r^3}\frac{dr}{dt} + \frac{1}{\bar{a}\cdot\bar{r}}\bar{b}\frac{dr}{dt} - \frac{r\bar{b}}{(\bar{a}\cdot\bar{r})^2}\left\{\bar{a}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}\right\}$$

எடுத்துக்காட்டு 6: $\bar{r} = (a\cos t)\,i + (a\sin t)\,j + (at\tan\alpha)\,k$ எனில் $\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|$; $\left[\frac{d\bar{r}}{dt}, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}, \frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right]$ ஆகியவற்றின் மதிப்பினைக் காண்க.

$$\bar{r} = (a\cos t)\,i + (a\sin t)\,j + (at\tan\alpha)\,k$$

$$\therefore \frac{d\bar{r}}{dt} = (-a\sin t)\,i + (a\cos t)\,j + (at\tan\alpha)\,k$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -(a\cos t)\,i - (a\sin t)\,j + 0$$

$$= -(a\cos t\,i + a\sin t\,j)$$

$$\frac{d^3\bar{r}}{dt^3} = a\sin t\,i - a\cos t\,j$$

$$\therefore \frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin t & a\cos t & a\tan\alpha \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= i\,a^2\tan\alpha\sin t - j\,a^2\cos t\tan\alpha + k\,a^2$$

$$\therefore \quad \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \right| = a^2 \sqrt{\tan^2 \alpha (\sin^2 t + \cos^2 t) + 1}$$

$$= a^2 \sqrt{\tan^2 \alpha + 1}$$

$$= a^2 \sec \alpha$$

மேலும், $\left[\frac{d\bar{r}}{dt} \quad \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \quad \frac{d^3\bar{r}}{dt^3} \right]$

$$= \frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \cdot \frac{d^3\bar{r}}{dt^3}$$

$$= (i\, a^2 \tan \alpha \sin t - j\, a^2 \cos t \tan \alpha + ka^2) \cdot (i\, a \sin t - j \cos t \,.\, a)$$

$$= a^3 \tan \alpha (\sin^2 t + \cos^2 t)$$

$$= a^3 \tan \alpha.$$

எடுத்துக்காட்டு 7 : ஒரு துகள் $x = 3t^2, \quad y = t^2 - 2t, \quad z = t^3$ எனும் பாதைவழி நகர்கிறது. அதன் திசைவேகமும் முடுக்கமும் $t = 1$ எனும் நேரத்தில் கணக்கிடுக.

$$\text{துகளின் பாதை } \bar{r} = (3t^2)\, i + (t^2 - 2t)\, j + (t^3)\, k$$

$$\therefore \text{ துகளின் திசைவேகம் } = \frac{d\bar{r}}{dt} = (6t)\, i + (2t - 2)\, j + 3t^2\, k$$

$$\therefore \; t = 1 \text{ எனும்போது திசைவேகம்} = 6i + 3k$$

$$\text{முடுக்கம்} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = 6i + 2j + 6tk$$

$$\therefore \; t = 1 \text{ எனும் நேரத்தில் முடுக்கம்}$$

$$= 6i + 2j + 6k.$$

எடுத்துக்காட்டு 8 : $\left[\bar{r}, \; \frac{d\bar{r}}{dt}, \; \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \right], \quad \bar{r} + \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \right)$ எனும் பெருக்கல்களின் இரண்டாவது படிவகைக் கெழு காண்க.

(i) $\bar{f} = \left[\bar{r} \; \frac{d\bar{r}}{dt} \; \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \right]$

$$\therefore \; \frac{d\bar{f}}{dt} = \left[\frac{d\bar{r}}{dt}, \; \frac{d\bar{r}}{dt}, \; \frac{d^2\bar{r}}{d^2t} \right] + \left[\bar{r}, \; \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}, \; \frac{d^2\bar{r}}{at^2} \right] + \left[\bar{r} \; \frac{d\bar{r}}{dt} \; \frac{d^3\bar{r}}{dt^3} \right]$$

$$= 0+0+\left[\ \bar{r}\ \frac{d\bar{r}}{dt}\ \ \frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\ \right]$$

$$= \left[\ \bar{r}\ \frac{d\bar{r}}{dt}\ \ \frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\ \right]$$

$$\frac{d^2\bar{f}}{dt^2} = \left[\frac{d\bar{r}}{dt}\ \ \frac{d\bar{r}}{dt}\ \ \frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right] + \left[\ \bar{r}\ \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\ \ \frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right] + \left[\ \bar{r}\ \frac{d\bar{r}}{dt}\ \ \frac{d^4\bar{r}}{dt^4}\right]$$

$$= 0+\left[\ \bar{r}\ \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\ \ \frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right]+\left[\ \bar{r}\ \frac{d\bar{r}}{dt}\ \ \frac{d^4\bar{r}}{dt^4}\right]$$

$$= \left[\ \bar{r}\ \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\ \ \frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right]+\left[\ \bar{r}\ \frac{d\bar{r}}{dt}\ \ \frac{d^4\bar{r}}{dt^4}\right]$$

(ii) $\bar{F} = \bar{r}\times\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)$

$$\therefore\ \frac{d\bar{F}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt}\times\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)+\bar{r}\times\left(\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right) + \bar{r}\times\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right)$$

$$= \frac{d\bar{r}}{dt}\times\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)+\bar{r}\times\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right)$$

$$\frac{d^2\bar{F}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\times\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)+\frac{d\bar{r}}{dt}\times\left(\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right) + \frac{d\bar{r}}{dt}\times\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right)+\frac{d\bar{r}}{dt}\times\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right) + \bar{r}\times\left(\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\times\frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right)+\bar{r}\times\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^4\bar{r}}{dt^4}\right)$$

இதில் இரண்டாவது உறுப்பாகிய $\frac{d\bar{r}}{dt}\times\left(\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)$ என்பது மட்டிலும் பூச்சியமாகும். மற்ற உறுப்புகளின் மொத்தமே $\frac{d\bar{F}}{dt^2}$ன் மதிப்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9 : $\bar{A} = x^2yzi-2xz^3j+xz^2k$;
$\bar{B} = 2zi+yj-x^2k$ எனில் $(1,\ 0,\ -2)$ எனும் புள்ளியில் $\frac{\partial^2(\bar{A}\times\bar{B})}{\partial x\partial y}$ன் மதிப்பு என்ன ? $\frac{\partial^2(\bar{A}\times\bar{B})}{\partial y\partial x}$ம் காண்க.

$$\overline{A}\times\overline{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x^2yz & -2xz^3 & xz^2 \\ 2z & y & -x^2 \end{vmatrix}$$

$$= i\,(2x^2z^3 - xyz^2) + j\,(2xz^3 + x^4yz) + k\,(x^2y^2z + 4xz^4)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial}{\partial y}(\overline{A}\times\overline{B}) = -ixz^2 + j\,(x^4z) + k\,(2x^2yz)$$

$$\frac{\partial^2(\overline{A}\times\overline{B})}{\partial x\,\partial y} = -iz^2 + j\,4x^3z + k\,4xyz.$$

$\therefore$ (1, 0, −2) எனும் புள்ளியில் இதன் மதிப்பு

$$= -4i - 8j$$

$$\frac{\partial(\overline{A}\times\overline{B})}{\partial x} = i\,(6x^2z^3 - yz^2) + j\,(2z^3 + 4x^3yz) + k\,(2xy^2z + 4z^4)$$

$$\frac{\partial^2(\overline{A}\times\overline{B})}{\partial y\,\partial x} = i\,(-z^2) + j\,(4x^3z) + k\,(4xyz)$$

எனவே இதன் மதிப்பும் (1, 0, −2) எனும் புள்ளியில், $-4i-8j$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10 : $\overline{V}(t)$ என்ற வெக்டர் சார்பின் எண்ணளவு மாறிலி மதிப்பாக இருக்கத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நியதி $\overline{V}\cdot\dfrac{d\overline{V}}{dt} = 0$ என நிறுவுக.

$\overline{V}(t)$ன் எண்ணளவு ஒரு மாறிலியானல்

$$|\overline{V}(t)| = C \text{ ஒரு மாறிலி}$$

$$\therefore \quad |\overline{V}(t)|^2 = C^2$$

$$\text{i.e.} \quad \overline{V}(t)\cdot\overline{V}(t) = C^2$$

இருபுறமும் tஐப் பொறுத்த வகைக் கெழு கண்டால்,

$$\frac{d\overline{V}}{dt}\cdot\overline{V} + \overline{V}\cdot\frac{d\overline{V}}{dt} = 0.$$

$$\text{i.e.} \quad 2\,\overline{V}\cdot\frac{d\overline{V}}{dt} = 0.$$

$$\text{i.e.} \quad \overline{V}\cdot\frac{d\overline{V}}{dt} = 0.$$

எனவே இந்நியதி தேவையானது என்று நிறுவப்படுகிறது. இனி இந்நியதி போதுமானது என்பதை நிறுவுவோம்.

$$\frac{d\overline{V}}{dt}\cdot\overline{V} = 0 \text{ எனில்}$$

$$2\frac{d\overline{V}}{dt}\cdot\overline{V} = 0.$$

i.e. $\frac{d}{dt}(\overline{V})^2 = 0.$

i.e. $\overline{V}\cdot\overline{V} = C$ ஒரு மாறிலி.

அதாவது $\overline{V}(t)$ன் எண்ணளவு ஒரு மாறிலி மதிப்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 11 : $\overline{V}(t)$ யின் திசை மாறாதிருக்கத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நியதி $\overline{V}\times\frac{d\overline{V}}{dt} = 0$ எனக் காண்பி.

$\overline{V}(t)$யின் திசை மாறாதிருந்தால் அதனை $\varphi(t)\,\hat{a}$ என எழுத இயலும்; $\hat{a}$ என்பது மாறிலியான ஓரலகு வெக்டர். $\varphi(t)$ என்பது tயின் திசையிலிச் சார்பு.

$$\therefore\quad \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\hat{a} + \varphi(t)\frac{d\hat{a}}{dt}$$

$$= \frac{d\varphi}{dt}\hat{a}$$

$$\therefore\quad \overline{V}\times\frac{d\overline{V}}{dt} = \{\varphi(t)\,\hat{a}\}\times\left(\frac{d\varphi}{dt}\hat{a}\right)$$

$$= \varphi(t)\frac{d\varphi}{dt}(\hat{a}\times\hat{a})$$

$$= 0$$

எனவே இந்நியதி தேவையானது என்பது வெளிப்படை.

இனி இது போதுமானது என்பதை நிரூபிக்க,

$$\overline{V}\times\frac{d\overline{V}}{dt} = 0 \text{ என்று கொள்வோம்.}$$

$\hat{a}$ என்பது ஓரலகு வெக்டர் எனவும் $\overline{V}(t) = \varphi(t)\,\hat{a}$ எனவும் இருக்கட்டும்.

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\hat{a} + \varphi\frac{d\hat{a}}{dt}$$

$$\therefore\quad \overline{V}\times\frac{d\overline{V}}{dt} = (\varphi(t)\,\hat{a})\times\left\{\frac{d\varphi}{dt}\hat{a} + \varphi\frac{d\hat{a}}{dt}\right\}$$

$$= \varphi^2\,\hat{a}\times\frac{d\hat{a}}{dt}$$

ஆனால் $\overline{V}\times\frac{d\overline{V}}{dt} = 0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad \varphi^2 \hat{a} \times \frac{d\hat{a}}{dt} = 0$$

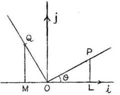
$$\therefore \quad \hat{a} \times \frac{d\hat{a}}{dt} = 0.$$

மேலும் $\hat{a}$ ஓரலகு வெக்டர் ஆகையால் அதன் எண்ணளவு மாறிலி மதிப்பாகும்.

$\therefore \ \hat{a} \cdot \frac{d\hat{a}}{dt} = 0. \ \therefore \ \frac{d\hat{a}}{dt} = 0$ அல்லது $\hat{a}$க்குச் செங்குத்து. ஆனால் $\hat{a} \times \frac{d\hat{a}}{dt} = 0$ என்பதனால் $\frac{d\hat{a}}{dt} = 0$. அல்லது $\hat{a}$க்கு $\frac{dt}{dt}$ இணை. ஆனால் $\frac{d\hat{a}}{dt}$, $\hat{a}$க்கு ஒருங்கே இணையாகவும் செங்குத்தாகவும் இருக்க முடியாது $\therefore \ \frac{d\hat{a}}{dt} = 0$. அதாவது $\hat{a}$ ஒரு மாறிலி வெக்டர். எனவே $\bar{\gamma}(t) = \varphi(t)\,\hat{a}$ என்பதும் திசை மாறாமல் அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 12: ஒரு சமதளத்தில் நகரும் ஒரு துகளின் ஆரைவழித் திசை வேகம் $\frac{d\bar{r}}{dt}$ எனவும், ஆரைக்குச் செங்குத்துத் திசையில் திசைவேகம் $r\,\frac{d\theta}{dt}$ எனவும், இவ்விரண்டு திசைகளிலும் முடுக்கங்கள் முறையே $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2;\ \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$ எனவும் காண்பி.

i, j என்பன இரு செங்குத்துக் கோடுகளின் வழியமைந்த ஓரலகு வெக்டர்கள். துகளின் நிலையைக் குறிக்கும் நிலைவெக்டர் $\bar{r}$, iன் திசையுடன் θ எனும் கோணம் உருவாக்கட்டும். அந்த ஆர வெக்டருக்குச் செங்குத்துக்கோடு ஒன்று வரைக. ஆரத்தின் வழியமையும் ஓரலகு வெக்டர் $\hat{e}$ எனவும் அதன் செங்குத்துத் திசையில் $\hat{f}$ எனவும் கொள்க. ஆரவெக்டரில் P எனும் புள்ளி $OP = 1$ அலகு எனும்படியும் அதற்குச் செங்குத்தான கோட்டில் Q எனும் புள்ளி $OQ = 1$ அலகு எனும்படியும் எடுத்துக்கொண்டு, P, Q விலிருந்து iன் தாங்கும் கோட்டின்மீது



படம் 91.

PL, QM என்ற செங்குத்துக்கோடுகள் வரையவும். இவ்வமைப்பு முறையினால்,

$$\overline{OP} = \hat{e} = \overline{OL}+\overline{LP}$$
$$= i\cos\theta + j\sin\theta$$
$$\overline{OQ} = \hat{f} = \overline{OM}+\overline{MP}$$
$$= -i\sin\theta + j\cos\theta \text{ என்றுகும்.}$$

மேலும், துகளின் நிலைவெக்டர்

$$\overline{r} = r\cos\theta\, i + r\sin\theta\, j.$$

துகளின் திசை வேகம் $\overline{V} = \dfrac{d\overline{r}}{dt}$

$$= \left(\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)i + \left(\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)j$$

$$= \frac{dr}{dt}(i\cos\theta + j\sin\theta) + r\frac{d\theta}{dt}(-i\sin\theta + j\cos\theta)$$

$$= \frac{dr}{dt}\hat{e} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{f}$$

எனவே திசைவேகத்தின் கூறு ஆரவழியமைவது $\dfrac{dr}{dt}$; அதற்குச் செங்குத்தான திசையில் அமைவது $r\dfrac{d\theta}{dt}$.

முடுக்கம் $\overline{a} = \dfrac{d^2\overline{r}}{dt^2}$

$$= i\left\{\frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta - \frac{dr}{dt}\sin\theta\frac{d\theta}{dt} - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{dr}{dt}\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right\}$$

$$+ j\left\{\frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta + \frac{dr}{dt}\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{dr}{dt}\cos\theta\frac{d\theta}{dt} - r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\right\}$$

$$= \left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}(i\cos\theta + j\sin\theta) + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)(-i\sin\theta + \cos\theta)$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{e} + \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\,(r^2\dot{\theta})\,\hat{f}$$

$\therefore$ ஆரைவழி முடுக்கம் $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

ஆரைக்குச் செங்குத்து வழியில் முடுக்கம் $\frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\,(r^2\dot{\theta})$

எடுத்துக்காட்டு 13 : ஒரு நகரும் துகளின் நிலைவெக்டர் $\bar{r} = i\cos\omega t + j\sin\omega t$ எனக் கிடைக்கிறது எனில் (a) துகளின் திசைவேகம் $\bar{r}$க்குச் செங்குத்துத் திசையில் அமைகிறது எனவும், (b) துகளின் மீதுள்ள முடுக்கம் ஆதியை நோக்கி அதன் தொலைவுக்கு நேர்விகிதத்தில் அமைந்துள்ளது எனவும், (c) $\bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt}$ என்பது ஒரு நிலையான வெக்டர் எனவும் காண்பி.

துகளின் நிலைவெக்டர் $\bar{r} = i\cos\omega t + j\sin\omega t$

$$\therefore \text{ திசைவேகம் } \bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = -\omega\sin\omega t\, i + \omega\cos\omega t\, j$$

$$\bar{r}\cdot\bar{v} = (i\cos\omega t + j\sin\omega t)\cdot(-\omega\sin\omega t\, i + \omega\cos\omega t\, j)$$

$$= -\omega\sin\omega t\cos\omega t + \omega\sin\omega t\cos\omega t$$

$$= 0$$

$\therefore$ $\bar{v}$ எனும் திசை வேகம் $\bar{r}$க்குச் செங்குத்து ஆகும்.

(b) துகளின் மீதுள்ள முடுக்கம்

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\omega^2\cos\omega t\, i - \omega^2\sin\omega t\, j$$

$$= -\omega^2(i\cos\omega t + j\sin\omega t)$$

$$= \omega^2\bar{r}$$

எனவே துகளின் மீதுள்ள முடுக்கம், ஆதியை நோக்கியும், அதனின்றும் துகளின் தொலைவுக்கு நேர் விகிதத்திலும் அமைகிறது என்பது புலனாகிறது.

$$\text{(c) } \bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

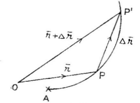
$$= k\,\{\omega\cos^2\omega t + \omega\sin^2\omega t\}$$

$$= \omega k$$

ω ஒரு மாறிலி ; k ஒரு மாறிலி வெக்டர்.

$\therefore \ \bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \omega k$ என்பது மாறிலியான வெக்டராகும்.

§ 7·06. ஒரு வளைவரையின் வளைவு (curvature)



படம் 92.

ஒரு வளைவரையில் ஏதாமொரு நிலைப்புள்ளி Aயிலிருந்து மாறும் புள்ளி P வரை உள்ள வளைவரையின் நீளம் 's' என்க. அப்படியானல் Pயின் நிலைவெக்டர் $\bar{r}$ திசையிலி மாறியாகிய sன் சார்பாகும். நாம் பொதுவாக $\bar{r}$ம் அதன் முதல் இரண்டு வரிசை வகைக் கெழுக்களும், வகைக் கெழு காணத் தக்க விதத்தில் அமைந்த வளைவரைகளை மட்டிலுமே எடுத்துக் கொள்வோம்.

Pக்கு அருகாமையிலுள்ள P'ன் நிலைவெக்டர் $\bar{r}+\Delta\bar{r}$ எனில், $\overline{PP'} = \Delta\bar{r}$. P'க்குத் தகுந்த sன் மதிப்பு $s+\Delta s$ என்க. அப்படியானல் $\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta s}$ என்பது $\Delta\bar{r}$க்கு இணையான வெக்டராகும். Δs பூச்சியத்தை நெருங்குகையில் $\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta s}$ன் எல்லை மதிப்பு, Pயில் வரையப்படும் தொடுகோட்டின் திசையில் அமையும் வெக்டராகும். மேலும் $\overline{PP'}$ என்ற நாணின் நீளத்திற்கும் PP' என்ற வில்லின் நீளத்திற்கும் உள்ள விகிதம், P' ஆனது Pயை நோக்கி நெருங்கி Pயுடன் ஒன்றும் போது, 1 ஆகும்.

$\therefore \frac{d\bar{r}}{ds} = \underset{\Delta s \to 0}{Lt} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta s} = \hat{t}$ எனில், $\hat{t}$ என்பது ஓரலகு வெக்டர். s அதிகரிக்கும் திசை நோக்கி Pயில் அமைந்த தொடுகோட்டின் மீது இவ்வெக்டர் அமையும். இதனையே நாம் ஓரலகுத் தொடுகோடு (unit tangent) என்று அழைப்போம். Pயின் ஆயத்தொலைகள் (x, y, z) எனில்

$$\bar{r} = xi+yj+zk$$

$$\therefore \ \hat{t} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\, i + \frac{dy}{ds}\, j + \frac{dz}{ds}\, k$$

$\therefore\ \hat{t}$ ன் திசைக் கொசைன்கள் $\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}$ ஆகும்.

மேற்கண்ட முடிவிலிருந்து ஒரு வளைவரையின் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டினை $\bar{R} = \bar{r} + u\hat{t}$ என்ற வடிவில் எழுதலாம்; $\bar{R}$ என்பது தொடுகோட்டில் அமையும் ஏதாமொரு புள்ளியின் நிலைவெக்டர், $\bar{r}$ என்பது வளைவரையில் எப்புள்ளியில் தொடுகோடு காணப்பட வேண்டுமோ அப்புள்ளியின் நிலைவெக்டர்; u என்பது திசையிலியான துணைமாறி (parameter) ஆகும்.

வளைவரையில் ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோட்டிற்குச் செங்குத்தாய் அப்புள்ளி வழிச் செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு $(\bar{R}-\bar{r})\cdot\hat{t} = 0$ என்பதாகும். இதனைச் செங்கோட்டுத் தளம் (normal plane) என்பர். ஏனெனில் Pயின் வழியே செல்வதும், இத்தளத்தில் அமைவது மான எல்லா நேர்கோடுகளும் இவ்வளைவரைக்குச் செங்கோடு ஆகும்.

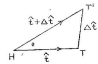
§ 7·07 முதன்மைச் செங்கோடு (Principal normal)

ஓரலகுத் தொடுகோட்டு வெக்டர் $\hat{t}$ன் எண்ணளவு மாறிலியானது.

$\therefore\ \frac{d\hat{t}}{ds}$, $\hat{t}$க்குச் செங்குத்தாகும். அதாவது வளைவரைக்குச் செங்கோடாகும்.

வளைவரையில் எடுக்கப்பட்ட புள்ளியின் இருபுறமும் வளைவரையின் மீது இரண்டு புள்ளிகள் எடுத்துக்கொள்வோம். இவ்விரு புள்ளிகளும் முதலில் எடுத்துக்கொண்ட புள்ளியை நெருங்குவதாய்க் கொள்வோம். எல்லை நிலையில் இம்மூன்று புள்ளிகளும் ஒன்றிவிடும். அந்த நிலையில் மூன்று புள்ளிகளும் சேர்ந்து உருவாக்கும் தளம் கொஞ்சு தளம் (osculating plane) எனப்படும். வளைவரையின் தொடுகோடு இத்தளத்தில் அமைகிறது. இத்தளத்தில் தொடுகோட்டிற்குச் செங்குத்தாக அமையும் நேர்கோடு முதன்மைச் செங்கோடு (Principal normal) எனப்படும். இக்கோட்டின் திசையில் அமைந்த ஓரலகு வெக்டர் $\hat{n}$ எனில், $\frac{d\hat{t}}{ds} = l\hat{n}$ என எழுத இயலும்; l என்பது தகுந்தவொரு திசையிலி. $\hat{n}$ஐ ஓரலகு முதன்மைச் செங்கோடு என்கிறோம். (unit principal normal) முதன்மைச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு $\bar{R} = \bar{r} + u\hat{n}$ என்பதாகும். இதில் u என்பது யாதாமொரு திசையிலித் துணை மாறி (scalar parameter).

§ 7·08. வளைவு (Curvature)



படம் 93.

Pயிலும் அதை அடுத்துள்ள புள்ளி P'-லும் வரையப்படும் ஓரலகுத் தொடுகோடுகள் $\hat{t}$, $\hat{t}+\Delta\hat{t}$ என்க. படத்தில் HT, HT' என்பன முறையே $\hat{t}$, $\hat{t}+\Delta\hat{t}$ யைக் குறிக்கின்றன. $\therefore \overline{TT'} = \Delta\hat{t}$.

இவ்விரண்டு புள்ளிகளிலும் வரையப்படும் தொடுகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\Delta\theta$ எனில், $T\hat{H}T' = \Delta\theta$. Hஐ மையமாகவும், ஓரலகு ஆரமாயும் உடைய ஒரு வட்டத்தின் வில்லிற்கு இக்கோணம் சமமாகும்.

i.e. $\dfrac{TT'}{\Delta\theta} = 1$ (எல்லை நிலையில்)

$$\text{மேலும் } l = \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right|$$

$$= \left|\underset{\Delta s\to 0}{Lt}\ \frac{\Delta\hat{t}}{\Delta s}\right|$$

$$= \left|\underset{\Delta s\to 0}{Lt}\ \frac{\overline{TT'}}{\Delta s}\right|$$

$$= \left|\underset{\Delta s\to 0}{Lt}\ \frac{\overline{TT'}}{\Delta\theta}\cdot\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$$

$$= \frac{d\theta}{ds}.$$

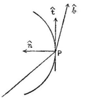
இதில் $\dfrac{d\theta}{ds}$ எனும் வகைக் கெழு Pயில் வரையப்படும் தொடுகோட்டின் வில் நீளத்தைப் பொறுத்த சுழற்சி வீதம் ஆகும் (**arc-rate of turning**). எனவே அப்புள்ளியில் வளைவரையின் வளைவு எனப்படும். எனவே l, Pயில் வளைவரையின் வளைவைக் குறிக்கிறது. $\dfrac{1}{l}$ என்பது வளைவு ஆரம் (**radius of curvature**) எனப்படும். இதனை ρ (உச்சரிப்பு 'ரோ') எனும் எழுத்தால் குறிப்பர். முதன்மைச் செங்கோட்டில் $\overline{PC} = \rho\hat{n}$ எனுமாறு அமைந்த C எனும் புள்ளி வளைவு மையம் (Centre of Curvature) எனப்படும்.

Pயில் வரையப்படும் தொடுகோட்டையும் முதன்மைச் செங்கோட்டையும் கொண்ட தளத்திற்கு வளைவின் தளம் (Plane of Curvature)

எனப் பெயர். இதன் சமன்பாடு $[\overline{R}-\overline{r},\ \hat{t},\ \hat{n}] = 0$ என்பதாகும். இத்தளமே கொஞ்சுதளமுமாகும். இக்கொஞ்சுதளத்தில் வளைவு மையம் Cயினை மையமாயும், ρ எனும் வளைவு ஆரமே ஆரமாயும் உடைய வட்டத்திற்கு வளைவு வட்டம் (Circle of Curvature) எனப் பெயர். Pயும் அதை அடுத்துள்ள இருபுள்ளிகளின் வழிச் செல்லும் ஒரு வட்டம், அப்புள்ளிகள் Pயினை நெருங்கும் எல்லைநிலையில் வளைவு வட்டமாகிறது.

§ 7·09. இருமைச் செங்கோடு (Binormal) முறுக்கம் (Torsion)

வளைவின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாய் P வழியே செல்லும் செங்குத்துக்கோடு இருமைச் செங்கோடு என அழைக்கப்பெறும். இது $\hat{t}\times\hat{n}$ எனும் வெக்டருக்கு இணையாகும். இத்திசையில் அமையும் ஓரலகு வெக்டர் $\hat{b}$ எனில் $\hat{t}\times\hat{n} = \hat{b}$.



படம் 94.

$\hat{t}$, $\hat{n}$, $\hat{b}$ என்பன வலக்கை அமைப்புடைய ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர்களாகும். $\hat{b}$ஐ ஓரலகு இருமைச் செங்கோடு என்று அழைக்கிறோம். (unit binormal).

$\hat{b}$யின் எண்ணளவு மாறிலியாகையால்

$$\{\because\ |\hat{b}| = 1\}$$

$\dfrac{d\hat{b}}{ds}$ என்பது $\hat{b}$க்குச் செங்குத்தாகும்.

மேலும் $\hat{t}\cdot\hat{b} = 0.$

இதனை வகைக் கெழுகண்டால்,

$$\frac{d\hat{t}}{ds}\cdot\hat{b}+\hat{t}\cdot\frac{d\hat{b}}{ds} = 0.$$

$$\text{i.e. } l\hat{n}\cdot\hat{b}+\hat{t}\cdot\frac{d\hat{b}}{ds} = 0.$$

ஆனால் $\hat{n}$க்கு $\hat{b}$ செங்குத்தாதலின், $\hat{n}\cdot\hat{b} = 0.$

$$\therefore\ \hat{t}\cdot\frac{d\hat{b}}{ds} = 0.$$

அதாவது $\dfrac{d\hat{b}}{ds}$ எனும் வெக்டர் $\hat{t}$க்கும் செங்குத்து. இவ்வாறு $\dfrac{d\hat{b}}{ds}$, $\hat{t}$க்கும் $\hat{b}$க்கும் செங்குத்தாகையால் $\hat{n}$க்கு இணையாயிருக்கும்.

$$\therefore\ \frac{d\hat{b}}{ds} = \lambda\hat{n} \text{ என எழுதலாம்;}$$

இதில் λ, $\hat{b}$யின், வில் நீளத்தைப் பொறுத்த சுழற்சி வீதத்தினைக் காட்டுகிறது. இச் சுழற்சி வீதம் Pயில் வளைவரையின் முறுக்கம் (Torsion) எனப்படும். உண்மையில் இது வளைவின் தளத்தின் வில் நீளத்தைப் பொறுத்த சுழற்சி வீதம் ஆகும். ஏனெனில் $\hat{b}$, வளைவின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாகும். s கூடுதலாகும் பொழுது இருமைச் செங்கோட்டின் சுழற்சி $\hat{t}$ஐப் பொறுத்து வலக்கை அமைப்புடைய தானல் முறுக்கம் மிகையானதாய்க் கொள்ளப்படும்.

இதுகாறும் $\hat{t}$, $\hat{b}$ ஆகியவற்றின் வகைக்கெழுக்களைக் கண்டு அவற்றின் விளக்கங்களையும் கண்டோம். இப்போது $\hat{n}$ன் வகைக் கெழு காண்போம்.

$$\hat{n} = \hat{b}\times\hat{t}$$

$$\therefore\ \frac{d\hat{n}}{ds} = \frac{d}{ds}(\hat{b}\times\hat{t})$$

$$= \frac{d\hat{b}}{ds}\times\hat{t}+\hat{b}\times\frac{d\hat{t}}{ds}$$

$$= \lambda\hat{n}\times\hat{t}+\hat{b}\times l\hat{n}$$

$$= -\lambda\hat{b}-l\hat{t}$$

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = l\hat{n}\,;\ \frac{d\hat{b}}{ds} = \lambda\hat{n}\,;\ \frac{d\hat{n}}{ds} = -\lambda\hat{b}-l\hat{t}$$

என்ற மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்து $\hat{t}$, $\hat{b}$, $\hat{n}$ ஆகியவற்றின் வகைக் கெழுக்கள் கிடைக்கும். இவை ஃபிரெனட் என்பாரின் (Frenet) திசையிலிகளாலான 9 சமன்பாடுகளுக்குச் சமமான வெக்டர் சமன்பாடுகளாகும். எனவே இவற்றை ஃபிரெனட்டின் வாய்ப்பாடுகள் என்பர். வளைந்து நெளிந்த வளைகோடுகளின் (Twisted curves) வகை நுண் வடிவ கணித (Differential Geometry) ஆய்விற்கு அடித்தளமாக இச்சமன்பாடுகள் அமைகின்றன. வளைவரையின் முக்கியமான பண்புகள் $\hat{t}$, $\hat{n}$, $\hat{b}$ ஆகியவற்றின் திசைகளிலும் l, λ என்ற திசையிலிகளின் அளவுகளிலும் பொதிந்து கிடக்கின்றன. எனவே ஃபிரெனட்டின் வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி அவற்றை ஆராயலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

1. எல்லாப் புள்ளிகளிலும் வளைவு பூச்சியமாய் உடைய வளைவரை ஒரு நேர் கோடாகும்.

2. எல்லாப் புள்ளிகளிலும் முறுக்கம் பூச்சியமான வளைவரை ஒரு சமதளமாகும்.

3. $l = \left| \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right|$ ஏனெனில் $\frac{d\bar{r}}{ds} = \hat{t}$

$\therefore \quad \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d\hat{t}}{ds} = l\hat{n}$

$\therefore \quad \left| \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right| = l$

4. $\frac{d\bar{r}}{ds} \times \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = l\hat{b}$

ஏனெனில் $\frac{d\bar{r}}{ds} = \hat{t}$; $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = l\hat{n}$;

$$\therefore \quad \frac{d\bar{r}}{ds} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \hat{t} \times l\hat{n} = l(\hat{t} \times \hat{n}) = l\hat{b}.$$

5. $\frac{d^3\bar{r}}{ds^3} = l(-\lambda\hat{b} - l\hat{t}) + \frac{dl}{ds}\hat{n}$

$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = l\hat{n}$; $\therefore \quad \frac{d^3\bar{r}}{ds^3} = \frac{dl}{ds}\hat{n} + l\frac{d\hat{n}}{ds}$

$$= \frac{dl}{ds}\hat{n} + l(-\lambda\hat{b} - l\hat{t})$$

6. $\left[\frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}, \frac{d^3\bar{r}}{ds^3} \right] = -l^2\lambda$

ஏனெனில் $\frac{d\bar{r}}{ds} = \hat{t}$; $\frac{d^2\hat{r}}{dt^2} = l\hat{n}$;

$$\frac{d^3\bar{r}}{ds^3} = l(-\lambda\ \hat{b} - l\hat{t}) + \frac{dl}{ds}\hat{n}$$

$$\therefore \quad \frac{d\bar{r}}{ds} \times \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \cdot \frac{d^3\bar{r}}{ds^3} = (\hat{t} \times l\hat{n}) \cdot \left\{ l(-\lambda\ \hat{b} - l\hat{t}) + \frac{dl}{ds}\hat{n} \right\}$$

$$= -\lambda l^2 \{\hat{t} \times \hat{n} \cdot \hat{b}\} - l^2(\hat{t} \times \hat{n} \cdot \hat{t}) + l^2\frac{dl}{ds}\hat{t} \times \hat{n} \cdot \hat{n}$$

$$= -\lambda l^2$$

§ 7·10 திசையிலிக் களமும், வெக்டர் களமும் (Scalar and vector fields)

மூவளவை வெளியில் (3 dimensional space) R எனும் ஒரு பகுதி (region) எடுத்துக்கொள்வோம். இப்பகுதியில் உள்ள ஒவ்வொரு

புள்ளியும் ஏதாவதொரு இயற்பியல் பண்புடன் தொடர்புடையதெனக் கொள்வோம். இவ்வியற்பியல் பண்பு ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் தகுந்த வாறு மாறுகிறுற்போலும், வரையறுக்கப்பட்ட மதிப்பினையுடைய தாயும், இருக்குமாறு ஏற்படுத்தப்பட்டுள்ளது எனக் கொள்வோம். அப் படியாயின் R எனும் மூவளவை வெளியின் பகுதி 'களம்' (Field) எனப்படும்.

களங்கள் இருவகைப்படும் ; திசையிலிக்களம், வெக்டர்களம் என் பவை அவ்விரு வகைகளாகும். இயற்பியல் பண்பை எழுதும் சார்பு, திசையிலியாயின் திசையிலிக் களம் என்றும், வெக்டர் சார்பாயின் வெக் டர் களம் என்றும் அழைப்பர். இவ்வாறு திசையிலிக் களத்தில் இயற் பியல் பண்பு திசையிலிச் சார்பினுல் கொடுக்கப்படும். களத்தின் பல் வேறு புள்ளிகளில் இத்திசையிலியின் மதிப்பு மாறுபடும். அதாவது P எனும் ஏதாவதொரு புள்ளியில் அதன் மதிப்பு, அப்புள்ளியின் ஆயத் தொலைகளைச் சார்ந்து அமையும் ; எனவே இயற்பியற் பண்பைக் காட் டும் இம்மாதிரி ஒரு புள்ளியின் நிலையைச் சார்ந்து அமைவதால், இதனை, 'திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பு' (Scalar point function) என அழைப்பர். எடுத்துக்காட்டாக, சூடாக்கப்பட்ட பொருள் ஒன்றில் சூட் டின் பரவல் நிலையை ஆராயும்போது, வெவ்வேறு புள்ளிகளில் உள்ள வெப்பநிலையைக் காட்டும் சார்பு, 'திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பாகும்.' பொருள் இடம் கொண்டுள்ள பகுதி வெளி 'திசையிலிக் களம்' ஆகும். இதேபோன்று பொருள் திணிவுப் பரவலைக் காட்டும் சார்பு (distribution of density), மின்சார நிலைச்சக்தி (Potential) முதலியன வேறு சில எடுத்துக் காட்டுகளாகும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட பகுதி வெளியிஞேடு ஓர் இயற்பியற் பண்பைத் தொடர்பு படுத்திக் காட்டுவது ஒரு வெக்டர் சார்பானுல், அக்களம் வெக்டர்களம் எனப்படும் என்று கண்டோம். எடுத்துக்காட்டாக, இயங்கிக் கொண்டிருக்கும் அரை நீர்மப்பகுதி ஒன்றின் (fluid) பல்வேறு புள்ளிகளின் திசை வேகங்களைக் குறிக்கும் சார்புகள் வெக்டர் சார்புகளாகும். எனவே அவ்வரை நீர்மப்பகுதி இடம் கொண்டுள்ள பகுதி வெக்டர் களம் எனப்படும். ஒவ்வொரு புள்ளி யிலும் அரை நீர்மத்தின் திசை வேகம் ஒரு தொடர்ச்சியான வெக்டர் சார்பாகும் (continuous vector function). ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் அவ்வரை நீர்மத்தின் திசைவேகம் ஒரு குறிப்பிட்ட திசையும் அளவும் கொண்டதாயும், களம் முழுவதிலும் புள்ளிக்குப் புள்ளி திசை யிலும் அளவிலும் அது தொடர்ச்சியாக மாறுபடுவதாயும் அமைகிறது. இவ்வாறு இயற்பியற் பண்பு ஒன்றினைப் புள்ளியின் நிலைக்குத் தக்க வாறு, தொடர்ச்சியாக மாறக்கூடிய வெக்டர் சார்பாக எழுதுவதைத் தான் 'வெக்டர் புள்ளிச் சார்பு' (Vector point function) என் கிறேம்.

§ 7·11 வகைக்கெழு காணப் பயன்படும் வெக்டர் செயலி : டெல். (The vector differential operator: Del.)

$\nabla = i\dfrac{\partial}{\partial x}+j\dfrac{\partial}{\partial y}+k\dfrac{\partial}{\partial z}$ எனும் வெக்டர் 'டெல்' என அழைக்கப்படும். இது ஒரு செயல்பாட்டினைக் குறிக்கும் (operation) குறியீட்டு வெக்டராகும். மற்ற வெக்டர்களைப் போன்று எல்லா விதிமுறைகளுக்கும் இது ஒத்துவருகிறது. இதனைப் பயன்படுத்தி சரிவு, (The gradient) அல்லது வாட்டம்; பாய்வு (The divergence), சுழல் (The curl) எனும் மூன்று கணியங்களை வரையறுக்கிறோம். ∇ன் கூறுகள் i, j, k வழியே $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$, $\dfrac{\partial}{\partial z}$ என்ற குறியீட்டு அளவுகளாகும். இவ்வாறு ∇ என்பது ஒரு 'வெக்டர் செயல்கருவி' அல்லது 'வெக்டர் செயலி' (Vector operator) ஆகும். அத்துடன் இது வகைக்கெழு காணும் செயலியாகவும் திகழ்கிறது. $\dfrac{d}{dx}$ என்பது திசையிலி நுண் கணிதத்தில் வகைக்கெழு காணும் செயல்பாட்டைக் குறிப்பதுபோன்று வெக்டர் நுண் கணிதத்தில் ∇ அமைகிறது. அதாவது φ என்பது (x, y, z)ல் ஒரு சார்பு எனில்,

$$\nabla\varphi = \left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi$$

$$= i\frac{\partial\varphi}{\partial x}+j\frac{\partial\varphi}{\partial y}+k\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

§ 7·12 திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பின் சரிவு (Gradient of a scalar function)

$\varphi(x, y, z)$ என்பது மூவளவை வெளியில் ஏதோ ஒரு பகுதிக்குப் பொருந்தும் ஒரு திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பு என்க. அப்படியானால் $i\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+j\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+k\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ எனும் வெக்டர் φன் சரிவு எனப்படும். இதனைச் 'சரிவு φ' என (grad φ) அழைப்பர். இவ்வாறு புதிய வெக்டரை வரையறை செய்ய, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ எனும் பகுதி வகைக்கெழுக்கள் (partial derivatives) காண இயலவேண்டும். $\varphi(x, y, z)$ எனும் சார்பு தொடர்ச்சியுள்ளதாயும், வகைக்கெழு காணத் தகுதியுடையதாயும் அமைகின்ற பகுதி முழுவதிலும் இம்மாதிரி 'சரிவு φ' எனும் வெக்டர் காண இயலும். எனவே,

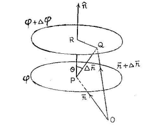
$$\text{சரிவு } \varphi = i\frac{\partial\varphi}{\partial x}+j\frac{\partial\varphi}{\partial y}+k\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \nabla\varphi$$

இது ஒரு வெக்டர் களத்தை வரையறுக்கிறது. φ என்பது மாறிலி யானால் $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$

$$\therefore \text{ சரிவு } \varphi = 0.$$

§ 7·13 $\nabla\varphi$ன் வடிவ கணித விளக்கம்

$\varphi(x, y, z)$ என்பது ஒரு திசையிலிப் புள்ளிச்சார்பு எனவும், P எனும் ஒரு புள்ளியில் இதன் மதிப்பு φ எனவும் கொள்வோம். O எனும் ஆதியைப் பொறுத்து Pயின் நிலைவெக்டர் $\overline{r}$ என்க.



படம் 95.

i.e. $OP = \overline{r}$

$Q(\overline{r}+\Delta\overline{r})$ எனும் அடுத்துள்ள புள்ளியில் சார்பின் மதிப்பு $\varphi+\Delta\varphi$ என்க.

$$\therefore \overline{PQ} = \Delta\overline{r}$$

Δr என்பது PQவின் நீளம் என்க. அப்படியானால் $\frac{\Delta\varphi}{\Delta r}$ என்பது Pயிலிருந்து Qவுக்கு, φ என்ன வீதத்தில் மாறுகிறது என்பதைக் காட்டுகிறது. Δr பூச்சியத்தை நெருங்குகையில் $\frac{\Delta\varphi}{\Delta r}$ன் எல்லை மதிப்பு, PQவின் திசையில் φன் வகைக்கெழு எனப்படும். அல்லது φன் திசை வகைக்கெழு (directional derivative) எனப்படும்.

c என்பது நம் விருப்பிற்கேற்ப எடுக்கப்படும் எண் எனக் கொண்டால், $\varphi(xyz) = c$ எனும் சமன்பாடு, cயின் பல்வேறு மதிப்புகளுக்குத் தகுந்தவாறு வளைதளங்களின் தொகுதியைக் கொடுக்கும். φ என்பது ஒரு மதிப்புடைய சார்பானால், கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி வழியே ஒரே ஒரு தளம் தான் செல்லும். மேலும் Pயின் வழிச்செல்லும் தளத்தில் எந்தப் புள்ளியில் எடுத்துக்கொண்டாலும் φக்கு ஒரே மதிப்புத்தான் கிடைக்கும். இம்மாதிரி தளங்களை (level surfaces) மட்ட தளங்கள் என்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக சமமான நிலைச் சக்தியுடைய தளம் (equipotential surface) என்பது மட்டதளமாகும்.

P, Q எனும் இரு அடுத்துள்ள புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் மட்ட தளங்களை எடுத்துக்கொள்வோம். இவற்றில் φ ன் மதிப்புகள் முறையே φ, $\varphi+\Delta\varphi$ என்க. Pயில் அதன் வழிச் செல்லும் மட்டதளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோடு (normal) Q வழிச் செல்லும் மட்டதளத்தினை Rல் வெட்டட்டும். இரு தளங்களுக்கும் இடைப்பட்ட மிகக் குறுகிய தூரம் Δn என்க. $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ என்பது Pயில் வெளிநோக்கிய செங்கோட்டின் வழியே φ ன் மாறும் வீதம் ஆகும். $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ என்பது PQ வின் வழியே φ மாறும் வீதம்.

$$Q\hat{P}R = \theta \text{ எனில்,}$$

$$PQ\cos\theta = PR$$

$$\text{i.e.}\quad \Delta r\cos\theta = \Delta n$$

$$\therefore\quad Lt\,\frac{\Delta n}{\Delta r} = \cos\theta$$

$$\therefore\quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = Lt\,\frac{\Delta\varphi}{\Delta r}$$

$$= Lt\,\frac{\Delta\varphi}{\Delta n}\,\frac{\Delta n}{\Delta r}$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos\theta$$

$$|\cos\theta| < 1 \text{ ஆகையால், } \frac{\partial\varphi}{\partial r} < \frac{\partial\varphi}{\partial n}.$$

அதாவது PQவின் வழியே φன் மாறும் வீதம், Pயில் வரையப்படும் செங்கோட்டின் வழியே மாறும் வீதத்தை விடக் குறைவாகும். PQ என்ற திசை நம் விருப்பிற் கேற்ப எடுத்துக் கொண்டதாகும். எனவே எந்த ஒரு புள்ளியிலும் φன் மாறும் வீதம் அப்புள்ளியில் வரையப்படும் செங்கோட்டின் வழியேதான் மிகக் கூடுதலாய் அமைகிறது.

Pயில் வரையப்படும் செங்கோட்டின் வழியமைந்த ஓரலகு வெக்டர் $\hat{n}$ என்க. அப்படியானால் $\Delta n = \hat{n}\,.\,\Delta\bar{r}$

$$\text{மேலும் } \Delta\varphi = \frac{\Delta\varphi}{\Delta n}\,\Delta n = \frac{\Delta\varphi}{\Delta n}\,\hat{n}\,.\,\Delta\bar{r}$$

$$\therefore\quad d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\hat{n}\,.\,d\bar{r}$$

ஆனால் $d\varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}dz$ என எழுதலாம்.

$$\nabla\varphi = i\frac{\partial \varphi}{\partial x} + j\frac{\partial \varphi}{\partial y} + k\frac{\partial \varphi}{\partial z} \text{ ஆகும்}$$

$$\bar{r} = xi + yj + zk \text{ ஆகையால்,}$$

$$d\bar{r} = dxi + dyj + dzk$$

$$\therefore \quad \nabla\varphi \cdot d\bar{r} = \left(i\frac{\partial \varphi}{\partial x} + j\frac{\partial \varphi}{\partial y} + k\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\cdot(idx + jdy + kdz)$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz$$

$$= d\varphi.$$

$$\therefore \quad d\varphi = \nabla\varphi\cdot d\bar{r}$$

ஆனால் $d\varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial n}\hat{n}\cdot d\bar{r}$ எனவும் கண்டோம்.

$$\therefore \quad \nabla\varphi\cdot d\bar{r} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}\hat{n}\cdot d\bar{r}$$

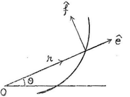
இச்சமன்பாட்டின் இருபுறமும் நம் விருப்பிற்கேற்ப எடுக்கப்பட்ட $d\bar{r}$ எனும் வெக்டர் அமைந்துள்ளது. எனவே புள்ளிப் பெருக்கலில் ஈடுபட்ட மற்ற இரு வெக்டர்களும் சமம்.

$$\therefore \quad \nabla\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n}\hat{n}$$

அதாவது $\nabla\varphi$ என்பது $\hat{n}$ன் திசையில் $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}}$ எனும் எண்ணளவுடன் அமைந்த வெக்டர் ஆகும். $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}$ என்பது Pயில் φயின் மிகப் பெரும் மாறும் வீதம் (greatest rate of increase) ஆகும். இவ்வாறு $\nabla\varphi$ன் விளக்கமானது கீழ்வருமாறு கொடுக்கப்படும்: 'திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பு $\varphi(xyz)$ன் சரிவு என்பது $\varphi(x, y, z) = C$ எனும் மட்டதளத்திற்கு அது அதிகரிக்கும் திசையில் வரையப்படும் செங்கோட்டின் திசையில் அமைந்த ஒரு வெக்டராகும். அதன் அளவு அப்புள்ளியில் அச்சார்பின் மீப்பெரு மாறும் வீதம் (maximum rate of increase) ஆகும்'. மேலும் $\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial n}\cos\theta$ ஆகையால் எத்திசையிலும் சார்பின் திசைவகைக்கெழு அத்திசையில் சார்பின் சரிவின் வீழ்ச்சிக்குச் சமமாகும்.

§ 7·14 கோண தூரக் கூறுகளில் சரிவு (Gradient in Polar Co-ordinates) :

P எனும் ஒரு புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $\bar{r}$ என்க. ஆர வழியான ஓரலகு வெக்டர் $\hat{e}$ எனவும், அதற்குச் செங்குத்தான திசையில் θ கூடும் திசை நோக்கி அமையும் ஓரலகு வெக்டர் $\hat{f}$ எனவும் கொள்க. ஆரவழி ஏற்படும் சிறுமாற்றம் dr என்க. எனவே ஆரவழியான திசைவகைக்கெழு



படம் 96.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \nabla \varphi \cdot \hat{e} \qquad \ldots\ldots(1)$$

ஆரத்திற்குச் செங்குத்தான திசையில் ஏற்படும் சிறு மாற்றம் $rd\theta$ ஆகும். எனவே அத்திசையில் திசைவகைக்கெழு

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \nabla \varphi \cdot \hat{f} \qquad \ldots\ldots(2)$$

மேலும் ஆரவழியிலும் அதற்குச் செங்குத்துத் திசையிலும் பிரித்து எழுதினால் (1), (2)ல் இருந்து,

$$\nabla \varphi = (\nabla \varphi \cdot \hat{e})\,\hat{e} + (\nabla \varphi \cdot \hat{f})\,\hat{f}$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial r}\,\hat{e} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\,\hat{f} \text{ என்றாகும்.}$$

இதேபோன்று கோளக்கூறுகளை எடுத்துக்கொண்டால் (Spherical polar co-ordinates) F எனும் ஒரு திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பின் சரிவு எழுத இயலும். இங்கு (r, θ, φ) என்பன ஆய எண்களாகப் பயன்படுவதால் $r =$ மாறிலி; $\theta =$ மாறிலி $\varphi =$ மாறிலி எனும் தளங்களுக்குச் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர்கள் முறையே $\hat{e}, \hat{f}, \hat{g}$ எனக் கொண்டால்,

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial r}\,\hat{e} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\,\hat{f} + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\,\hat{g}$$

என்று ஆகும்.

§ 7·15 முக்கியமான சில வழி முடிவுகள் :

1. *திசையிலிப் புள்ளிச் சார்புகளின் கூட்டலின் சரிவு = தனித் தனிச் சார்புகளின் சரிவுகளின் கூட்டல்.*

u, v என்பன திசையிலிப் புள்ளிச் சார்புகள் எனில்

$$\nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v$$

ஏனெனில் $\nabla(u+v) = i\dfrac{\partial}{\partial x}(u+v) + j\dfrac{\partial}{\partial y}(u+v) + k\dfrac{\partial}{\partial z}(u+v)$

$$= \left(i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(i\frac{\partial v}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial y} + k\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$= \nabla u + \nabla v.$$

2. இரு சார்புகளின் பெருக்கலின் சரிவு காணுதல் :

$$\nabla(uv) = \frac{i\partial}{\partial x}(uv) + j\frac{\partial}{\partial y}(uv) + k\frac{\partial}{\partial z}(uv)$$

$$= i\left\{u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial z}\right\} + j\left\{u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right\} + k\left\{u\frac{\partial v}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$

$$= u\left\{i\frac{\partial v}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial y} + k\frac{\partial v}{\partial z}\right\} + v\left\{i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$

$$= u\nabla v + v\nabla u.$$

3. சார்பின் சார்புக்குச் சரிவு காணுதல் :

$v = f(u)$ என்க. u என்பது x, y, zன் சார்பு

$$\therefore\ \nabla v = \nabla f(u)$$

$$= \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right) f(u)$$

$$= f'(u)\left\{i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$

$$= f'(u)\nabla u$$

$f'(u)$ என்பது $\dfrac{d}{du}\{f(u)\}$ என்பதைக் குறிக்கிறது. இவ்வாறு சாதாரண வகைக்கெழு காணும் விதிமுறைகளை ∇ பின்பற்றுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1 : $\bar{r} = xi + yj + zk$; $|\bar{r}| = r$; $\hat{r}$ என்பது $\bar{r}$ன் திசையில் அமையும் ஓரலகு வெக்டர் எனில்,

(i) $\nabla r = \hat{r}$

(ii) $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{r}}{r^2}$ என நிறுவுக.

(i) $\quad \bar{r} = xi+yj+zk$

$$\therefore \quad |\bar{r}|^2 = r^2 = x^2+y^2+z^2$$

$$\therefore \quad 2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x; \qquad \text{i.e. } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

அதேபோன்று $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}; \ \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$

$$\nabla r = i\frac{\partial r}{\partial x}+j\frac{\partial r}{\partial y}+k\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$= i\frac{x}{r}+j\frac{y}{r}+k\frac{z}{r}$$

$$= \frac{ix+jy+kz}{r}$$

$$= \frac{\bar{r}}{r} = \hat{r}$$

$$\text{(ii)} \quad \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)+j\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+k\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{r^2}\left\{i\frac{\partial r}{\partial x}+j\frac{\partial r}{\partial y}+k\frac{\partial r}{\partial z}\right\}$$

$$= -\frac{1}{r^2}\left\{\frac{ix+jy+kz}{r}\right\}$$

$$= -\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\bar{r}}{r}\right\}$$

$$= -\frac{\hat{r}}{r^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2: $\nabla e^{(x2+y2+z2)} = 2e^{r2}\bar{r}$ எனக்காண்பி.

$$\bar{r} = xi+yj+zk; \qquad \therefore \quad r^2 = x^2+y^2+z^2$$

$$\therefore \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\therefore \quad \nabla e^{r^2} = \nabla e^{(x^2+y^2+z^2)}$$

$$= i\frac{\partial}{\partial x}(e^{r^2})+j\frac{\partial}{\partial y}(e^{r^2})+k\frac{\partial}{\partial z}(e^{r^2})$$

$$= ie^{r^2}2r\frac{\partial r}{\partial x}+je^{r^2}2r\frac{\partial r}{\partial y}+ke^{r^2}2r\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$= e^{r^2}\, 2r \left\{ i\frac{\partial r}{\partial x} + j\frac{\partial r}{\partial y} + k\frac{\partial r}{\partial z} \right\}$$

$$= e^{r^2}\, 2r \left\{ \frac{ix+jy+kz}{r} \right\}$$

$$= 2e^{r^2}\bar{r}.$$

எடுத்துக்காட்டு 3 : $\bar{r} = xi+yj+zk$; $|\bar{r}| = r$ எனில், $\nabla f(r) \times \bar{r} = 0$ எனக் காண்பி.

$$\bar{r} = xi+yj+zk\ ;\ r^2 = |r|^2 = x^2+y^2+z^2$$

$$\therefore\ \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r},\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r},\ \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}\ ;$$

$$\therefore\ \nabla f(r) = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right) f(r)$$

$$= \frac{df}{dr} \left\{ i\frac{\partial r}{\partial x} + j\frac{\partial r}{\partial y} + k\frac{\partial r}{\partial z} \right\}$$

$$= \frac{df}{dr}\frac{\bar{r}}{r}$$

$$\therefore\ \nabla f(r) \times \bar{r} = \frac{1}{r}\frac{df}{dr}\,\bar{r}\times\bar{r}$$

$$= 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 4 : $\bar{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$; $\bar{r} = xi+yj+zk$; எனில் (i) $\bar{a}\cdot\nabla\bar{r} = \bar{a}$ (ii) $\nabla(\bar{a}\cdot\bar{r}) = \bar{a}$ என நிறுவுக.

$$\bar{a}\cdot\nabla = (a_1 i + a_2 j + a_3 k)\cdot\left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$= \left(a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + a_3\frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\therefore\ (\bar{a}\cdot\nabla)\,\bar{r} = \left(a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + a_3\frac{\partial}{\partial z} \right)(xi+yj+zk)$$

$$= a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

$$= \bar{a}$$

(ii) $$\bar{a}\cdot\bar{r} = (a_1 i + a_2 j + a_3 k)\cdot(xi+yj+zk)$$

$$= a_1 x + a_2 y + a_3 z$$

$$\therefore\ \nabla(\bar{a}\cdot\bar{r}) = \left\{ i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right\}(a_1 x + a_2 y + a_3 z)$$

$$= a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

$$= \bar{a}$$

எடுத்துக்காட்டு 5 : B என்பது பூச்சியமில்லாத ஒரு திசையிலிச் சார்பு எனில், $\nabla\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{B\nabla A-A\nabla B}{B^2}$ என நிறுவுக.

$$\Delta\left(\frac{A}{B}\right)=i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A}{B}\right)+j\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A}{B}\right)+k\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{A}{B}\right)$$

$$=i\left\{\frac{B\frac{\partial A}{\partial x}-A\frac{\partial B}{\partial x}}{B^2}\right\}+j\left\{\frac{B\frac{\partial A}{\partial y}-A\frac{\partial B}{\partial y}}{B^2}\right\}+k\left\{\frac{B\frac{\partial A}{\partial z}-A\frac{\partial B}{\partial z}}{B^2}\right\}$$

$$=\frac{B\left(i\frac{\partial A}{\partial x}+j\frac{\partial A}{\partial y}+k\frac{\partial A}{\partial z}\right)-A\left(i\frac{\partial B}{\partial x}+j\frac{\partial B}{\partial y}+k\frac{\partial B}{\partial z}\right)}{B^2}$$

$$=\frac{B\nabla A-A\nabla B}{B^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 6 : $P(x, y, z)$ எனும் புள்ளியை ஆய ஆதிக்கு இணைக்கும் கோட்டின் நீளம் r எனவும், Pயின் வெக்டர் $\bar{r}$ எனவும் இருந்தால், $\nabla(r^n)=nr^{n-2}\bar{r}$ எனக்காண்பி.

முறை I $\varphi=r^n$ எனும் புள்ளிச் சார்புக்குத் தகுந்த மட்ட தளங்கள், ஆய ஆதியை மையமாகக் கொண்ட ஏக மைய கோளங்கள் ஆகும். எனவே P எனும் ஏதாமொரு புள்ளியில் இம்மட்ட தளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோட்டின் திசையில் அமைந்த ஓரலகு வெக்டர் $\hat{n}$ அப்புள்ளிக்கு வரையப்படும் நிலைவெக்டர் $\bar{r}$ க்கு இணையாகும். எனவே $\frac{\bar{r}}{r}=\hat{n}$ என்று கிடைக்கும். $\{\because |\bar{r}|=r\}$

$$\text{வரையறையின்படி } \nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\hat{n}$$

இங்கு $=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r}$ ($\hat{r}$ என்பது $\bar{r}$ன் திசையிலுள்ள ஓரலகு வெக்டர்)

$$=\frac{\partial r^n}{\partial r}\frac{\bar{r}}{r}.$$

$$=n\,r^{n-1}\frac{\bar{r}}{r}$$

$$=nr^{n-2}\bar{r}$$

முறை II. Pயின் ஆயத் தொலைகள் (x, y, z) ஆகையால், $\bar{r}=xi+yj+zk,\ |\bar{r}|^2=r^2=x^2+y^2+z^2$

$$\therefore \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\ \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\ \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

$$\therefore \nabla(r^n)\left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}\right)r^n$$

$$= nr^{n-1}\left\{i\frac{\partial r}{\partial x}+j\frac{\partial r}{\partial y}+k\frac{\partial r}{\partial z}\right\}$$

$$= nr^{n-1}\left\{\frac{xi+yj+zk}{r}\right\}$$

$$= nr^{n-2}\bar{r}$$

எடுத்துக்காட்டு 7 : (1, 1, 3) எனும் புள்ளியில் $u = xyz^2$ என்ற சார்பின் மீப்பெரு அதிகரிப்பு வீதம் எவ்வளவு?

ஒரு புள்ளியில் ஒரு சார்பின் மீப்பெரு அதிகரிப்பு வீதம், அப் புள்ளியில் அச்சார்பின் சரிவினால், திசையிலும் அளவிலும் குறிக்கப் பெறும்.

$$\therefore \nabla u = \left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial x}\right)xyz^2$$

$$= iyz^2+jxz^2+k2xyz$$

$\therefore$ (1, 1, 3) எனும் புள்ளியில் இதன் மதிப்பு $9i+9j+6k$ ஆகும்.

$$\therefore \text{அளவு} = |9i+9j+6k| = \sqrt{81+81+36} = \sqrt{198}$$

எடுத்துக்காட்டு 8 : (1, −1, 3) என்ற புள்ளியில் $i+2j+2k$ எனும் வெக்டரின் திசையில் $2xy+z^2$ எனும் சார்பின் திசை வகைக் கெழுவைக் கண்டுபிடி.

$\bar{a}$ என்ற வெக்டரின் திசையில் φயின் திசைவகைக் கெழு $\nabla\varphi\cdot\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$ ஆகும்.

இங்கு $\varphi = 2xy+z^2$

$$\therefore \nabla\varphi = \left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial x}\right)(2xy+z^2)$$

$$= i2y+j2x+k2z.$$

$$= 2(iy+jx+kz)$$

(1, −1, +3) என்ற புள்ளியில் இதன் மதிப்பு

$$= 2(-i+j+3k)$$

$\therefore\ i+2j+2k$ எனும் வெக்டரின் திசையில் திசை வகைக்கெழு $= \nabla\varphi \cdot \dfrac{i+2j+2k}{\sqrt{9}}$

$$= \frac{2(-i+j+3k)\cdot(i+2j+2k)}{3}$$

$$= \frac{2\ (-1+2+6)}{3} = \frac{14}{3}.$$

எடுத்துக்காட்டு 9: $\nabla\varphi = yzi+zxj+xyk$ எனில் φ ன் மதிப்பு என்ன?

$$\nabla\varphi = i\frac{\partial\varphi}{\partial x} + j\frac{\partial\varphi}{\partial y} + k\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

ஆனால் $\nabla\varphi = yzi+zxj+xyk$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} = yz,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = zx,\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = xy.$$

$\therefore\ \varphi = xyz+x$ அல்லாத ஒரு மாறிலி.

அல்லது $= xyz+y$ அல்லாத ஒரு மாறிலி.

அல்லது $= xyz+z$ அல்லாத ஒரு மாறிலி.

இம்மூன்றையும் நிறைவு செய்யவேண்டுமாயின்

$\varphi = xyz+x,\ y,\ z$ எதுவுமில்லாத ஒரு மாறிலி.

i.e. $= xyz+C$ என்ற வடிவில் அமையவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 10: $x^2y+z=3,\ x\log z-y^2=-4,$ என்ற வளைதளங்கள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளிகளில் ஒன்றான $(-1, 2, 1)$-ல் அத்தளங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் என்ன?

வெட்டும் புள்ளியில் தளங்களுக்கு வரையப்படும் செங்கோடுகளுக் கிடைப்பட்ட கோணம் தான் தளங்களுக்கிடைப்பட்ட கோணமாகும். தளத்திற்குச் செங்குத்தான ஓரலகு வெக்டர் $\hat{n} = \dfrac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}$ ஆகும்.

$x^2y + z = 3$ என்ற தளத்திற்கு

$$\nabla\varphi = i\ 2xy+x^2j+k$$

$\therefore$ ஓரலகு வெக்டர் $\dfrac{i2xy+x^2j+k}{\sqrt{4x^2y^2+x^4+1}} = \hat{n}_1$

$(-1, 2, 1)$-ல் இவ்வெக்டர் $= \dfrac{-4i+j+k}{\sqrt{16+1+1}}$

$$= \frac{-4i+j+k}{\sqrt{18}}$$

$x \log z - y^2 + 4 = 0$ எனும் தளத்திற்கு

$$\nabla \varphi = i \log z - 2yj + \frac{x}{z} k$$

$$= -4j - k \quad \{(-1, 2, 1) \text{ என்ற புள்ளியில்}\}$$

$\therefore$ ஓரலகு வெக்டர் $= \dfrac{-4j - k}{\sqrt{17}} = \hat{n}_2$ என்க.

ஆய ஆதியின் ஆயத் தொலைகளைத் தளங்களின் சமன்பாடுகளில் பிரதியிட்டால் மாறுபட்ட குறியீடுடைய மதிப்புகள் வருவதால் வளை தளங்களில் ஒன்றின் உள்ளேயும், மற்றதின் வெளியிலுமாக ஆதி அமைகிறது. எனவே ($\hat{n}_2$வின் குறியீட்டை மாற்றிக்கொண்டு) $\hat{n}_1$க்கும் $\hat{n}_2$க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் காணவேண்டும். இரண்டுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில்,

$$\cos \theta = \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2$$

$$= \frac{(-4i + j + k)}{\sqrt{18}} \cdot \frac{(4j + k)}{\sqrt{17}}$$

$$= \frac{(4+1)}{\sqrt{306}} = \frac{5}{\sqrt{306}}$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{306}}\right)$$

பயிற்சி 7—(1)

1. (i) $\bar{r} = (1 - \cos t)\, i + (t - \sin t) j$

(ii) $\bar{r} = t^3 i + (t^2 + t^5) j + k \cos t$

(iii) $\bar{r} = 6i - 3t^2 j + 14tk$ எனில்

$\dfrac{d\bar{r}}{dt}, \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$களின் மதிப்பு என்ன?

2. $\bar{r} = t^2 i - t^3 j + (2t + 3)k$; எனில் $t = 0$ எனும் போது $\dfrac{d\bar{r}}{dt}, \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

3. (i) $r^n \bar{r}$, (ii) $r^2\, \bar{r} + (\bar{a} \cdot \bar{r})\, \bar{b}$, (iii) $r^2 \bar{r} + \bar{b} \times \dfrac{d\bar{r}}{dt}$ என்பன வற்றில் $|\bar{r}| = r$, $\bar{a}$, $\bar{b}$ என்பன மாறிலி வெக்டர்கள் எனில் $\dfrac{d\bar{r}}{dt}$ஐக் கண்டுபிடி.

4. $\bar{r}$ என்பது திசையிலி மாறி tயின் சார்பு ; $\bar{A}$ என்பது மாறிலி வெக்டர் எனில் (i) $\bar{r} \times \bar{A}$ (ii) $\bar{r} \cdot \bar{A}$; (iii) $\bar{r} \cdot \dot{\bar{r}}$, (iv) $\bar{r} \times \dot{\bar{r}}$ ஆகியவற்றின் tஐப் பொறுத்த வகைக்கெழு காண்க.

5. (i) $\frac{\overline{r}}{r^2} + \frac{r\overline{b}}{\overline{a}\cdot\overline{r}}$ (ii) $\frac{\overline{r}+\overline{a}}{r^2+a^2}$ (iii) $\frac{\overline{r}\times\overline{a}}{\overline{r}\cdot\overline{a}}$ என்பவற்றின் tஐப் பொறுத்த வகைக் கெழு காண்க.

6. $\overline{r} = i\cos nt + j\sin nt$; n என்பது மாறிலி ; t என்பது மாறி எனில் $\overline{r}\times\frac{d\overline{r}}{dt} = nk$ என நிறுவுக.

7. $\overline{F} = \frac{\overline{r}}{r}$; $\overline{r} = \overline{f}(t)$ எனில் $\overline{F}$ன் tஐப் பொறுத்த வகைக் கெழுவைக் காண்க. $\overline{F}\times\frac{d\overline{F}}{dt}$ ன் மதிப்பையும் காண்க.

8. $\overline{r} = i\sec t + j\tan t$ என்பது P எனும் ஒரு புள்ளியின் நிலை வெக்டர் எனில், $t = \frac{\pi}{6}$ எனும்போது, அப்புள்ளியின் திசை வேகமும் முடுக்கமும் கணக்கிடுக.

9. $x = 2\sin 3t$, $y = 2\cos 3t$; $z = 8t$; எனும் வளை வரையில் நகரும் துகளின் திசை வேகமும், முடுக்கமும் காண்க. அவற்றின் எண்ணளவுகளையும் கணக்கிடுக.

10. $x = t^3+1$; $y = t^2$; $z = 2t+5$; என்பவை t எனும் ஒரு குறித்த நேரத்தில் ஒரு துகளின் மூவளவை ஆயத்தொலைகள் எனில், துகளின் திசைவேகம் முடுக்கம் ஆகியவற்றினைக் கணக்கிடுக. $t=1$ எனும்போது $i+j+3k$ எனும் திசையில் இவற்றின் கூறுகளையும் கணக்கிடுக.

11. $x = e^{-t}$; $y = a\cos 3t$; $z = b\sin 3t$; எனும் துணையலகுச் சமன்பாடுகளால் (parametric equations) குறிக்கப்படும் பாதையில் நகரும் ஒரு துகளின் திசைவேகம், முடுக்கம் ஆகியவற்றினைக் கணக்கிடுக. $t=0$ எனும் போது இம்மதிப்புகள் என்னவாகின்றன?

12. $\overline{A} = 5t^2 i + tj - t^3 k$; $\overline{B} = i\sin t - j\cos t$ எனில், $\frac{d}{dt}(\overline{A}\cdot\overline{B})$; $\frac{d}{dt}(\overline{A}\times\overline{B})$; $\frac{d}{dt}(\overline{A}\cdot\overline{A})$; $\frac{d}{dt}(\overline{B}\cdot\overline{B})$ என்பவற்றைக் கணக்கிடுக.

13. $\overline{A}\times\frac{d^2\overline{B}}{dt^2} - \frac{d^2\overline{A}}{dt^2}\times\overline{B} = \frac{d}{dt}\left\{\overline{A}\times\frac{d\overline{B}}{dt} - \frac{d\overline{A}}{dt}\times\overline{B}\right\}$ என நிறுவுக.

14. $\overline{A} = i\sin\theta + j\cos\theta + \theta k$
$\overline{B} = i\cos\theta - j\sin\theta - 3k$

$\overline{C} = 2i+4j-5k$ எனில்

$\frac{d}{d\theta}\{\overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C})\}$ன் மதிப்பை $\theta=0$ எனும் போது காண்க.

15. கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு $\nabla\varphi$ காண்க:

(i) $\varphi=x^2yz$; (ii) $\varphi=xy^2z$;

(iii) $\varphi=xyz$; (iv) $\varphi=x^2+y^2+z^2$;

(v) $\varphi=(x^2+y^2+z^2)^2$; (vi) $\varphi=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$;

(vii) $\varphi=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$; (viii) $\varphi=\log(x^2+y^2+z^2)$;

(ix) $\varphi=x^3+y^3+z^3-3xyz$.

16. $\varphi(x, y, z)=x^2y-2y^2z^3$ எனில் $(1, 2, -1)$ $(2, 4, 3)$ $(1, -1, 2)$ எனும் புள்ளிகளில் $\nabla\varphi$ காண்க.

17. கீழ்க்காணும் வளைதளப் பரப்புகளுக்கு, கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளில் வரையப்படும் ஓரலகுச் செங்கோடுகளைக் காண்க.

(i) $x^2y^3z=4$; புள்ளி $(1, 2, \frac{1}{2})$

(ii) $x^2y^2-2xz=4$; புள்ளி $(2, -2, 3)$

(iii) $xy^3z^2=4$; புள்ளி $(1, 1, 2)$

(iv) $z=x^2+y^2$; புள்ளி $(1, -2, 5)$

(v) $xy^2-2xz=4$; புள்ளி $(-2, 2, 3)$

(vi) $x^2-y^2+yz=2$; புள்ளி $(2, 1, -1)$.

18. $\varphi=xy^2z^3$ எனும் சார்பின் திசை வகைக்கெழு $(-1, 1, 2)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து எத்திசையில் மீப்பெரு மதிப்பாய் அமைகிறது? அம்மீப்பெரு மதிப்பு என்ன?

19. (x, y, z) எனும் ஆயத் தொலைகள் கொண்ட ஒரு புள்ளி வெப்பநிலை (temperature) $T=xy+yz+zx$ எனும் சமன்பாட்டினால் பெறப்படும் எனில், $(1, 1, 1)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து எத்திசையில், வெப்ப நிலை மாறும் வீதம் மீப்பெரு மதிப்பாயுள்ளது என்பதையும், அம்மீப்பெரு மதிப்பு மாறும் வீதத்தினையும் கணக்கிடுக.

20. $(1, 2, 3)$ எனும் புள்ளியில் $(3i+4j+5k)$ எனும் வெக்டரின் திசையில் $\varphi=xy+yz+zx$ எனும் சார்பின் திசை வகைக்கெழு காண்க.

21. $(2, -1, 1)$ எனும் புள்ளியில் $i+2j+2k$ எனும் வெக்டரின் திசையில் $\varphi(x, y, z)=xy^2+yz^3$ எனும் சார்பின் வகைக்கெழு காண்க.

22. $U=x^2+y^2+z^2$ என்ற சார்பிற்கு $(1, 2, 3)$ என்ற புள்ளியில் $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$ என்ற திசையில் திசை வகைக்கெழு என்ன?

23. $xy=z^2$ என்ற வளைதளத்திற்கு $(1, 4, 2)$ $(-3, -3, 3)$ என்ற புள்ளிகளில் வரையப்படும் செங்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் என்ன?

24. $x^2+y^2+z^2=9$; $z=x^2+y^2-3$ என்ற வளைதளப் பரப்புகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $(2, -1, 2)$ என்ற புள்ளியில் என்ன?

25. $P(1, 2, 3)$ எனும் புள்ளியில் $Q(5, 0, 4)$ எனும் புள்ளியை Pக்கு இணைக்கும் PQ எனும் திசையில், $\varphi=x^2-y^2+2z^2$ எனும் சார்பின் திசை வகைக்கெழு என்ன?

26. $\varphi(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ எனும் சார்புக்கு $P(3, 1, 2)$-ல் $yzi+zxj+xyk$ எனும் திசையில் வகைக்கெழு என்ன?

27. $\varphi=x^2-2y^2+4z^2$, $P(1, 1, -1)$ எனும் புள்ளியில் $2i+j-k$ எனும் திசையில் φன் திசை வகைக்கெழு என்ன? இதன் மீப்பெரு மதிப்பு அப்புள்ளியில் என்ன?

28. $\frac{y}{x^2+y^2}$ எனும் சார்புக்கு $(0, 1)$ எனும் புள்ளியில் x அச்சின் மிகைத் திசையோடு $30°$ கோணம் உண்டாக்கும் நேர்கோட்டின் திசையில் திசைவகைக் கெழு காண்க.

29. $x^2+y-z=1$ என்ற வளைதளத்திற்கு $(1, 0, 0)$வில் சரிவும், அப்புள்ளியில் ஓரலகுச் செங்கோடும் காண்க.

30. $\nabla\varphi=(y^2-2xyz^3)\,i+(3+2xy-x^2z^3)j+(6z^3-3x^2yz^2)k$ எனில் φ என்ன?

31. $\nabla\varphi=2xyz^3i+x^2z^3j+3x^2yz^2k$, $\varphi(1, -2, 2)=4$ எனில் φன் மதிப்பு என்ன?

32. $\varphi=xy+yz+zx$, $\bar{a}=x^2yi+y^2zj+z^2xk$ எனில் $\bar{a}\cdot$(சரிவு φ)ன் மதிப்பும் $\bar{a}\times$(சரிவு φ)ன் மதிப்பும் $(3, -1, 2)$ என்ற புள்ளியில் காண்க.

§ 7·16. ∇ன் வெக்டர் செயல்பாடுகள் (Vector operations of ∇):

∇ என்பது ஒரு வெக்டர் செயலி என்று முன்பே சொன்னோம். எனவே இது ஒரு வெக்டர் புள்ளிச் சார்பு $\overline{F}$ உடன் புள்ளிப் பெருக்

கலிலோ அல்லது வெக்டர் பெருக்கலிலோ ஈடுபட இயலும். $\nabla \cdot \overline{F}$ எனும் மதிப்பினை அச்சார்பின் பாய்வு (divergence) என்கிறோம். $\nabla \times \overline{F}$ எனும் வெக்டர் $\overline{F}$ன் சுழல் (curl) எனப்படும்.

§ 7·17. ஒரு வெக்டர் சார்பின் பாய்வு (Divergence of a vector function):

$\overline{F}$ என்பது வெக்டர் களம் ஒன்றில், வரையறுக்கப்பட்ட, வகைக்கெழு காணத்தக்க, வெக்டர் புள்ளிச் சார்பு என்க. அப்படியானால் களத்தில் ஒவ்வொரு புள்ளி (x, y, z)இலும் $\overline{F}$க்கு மதிப்பு கிடைப்பதுடன், அப்புள்ளியில் அச்சார்பின் வகைக்கெழுவும் காணத்தக்க நிலையில் அச்சார்பு அமையும். இந்நிலையில் $\nabla \cdot \overline{F}$ என்பது ஒரு திசையிலியைக் கொடுக்கும். அதுவே $\overline{F}$ ன் பாய்வு எனப்படும். எழுதுகையில் 'பாய்வு $\overline{F}$' என எழுதுகிறோம்.

$$\nabla \cdot \overline{F} = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \overline{F}$$

$$= i \cdot \frac{\partial \overline{F}}{\partial x} + j \cdot \frac{\partial \overline{F}}{\partial y} + k \cdot \frac{\partial \overline{F}}{\partial z}$$

$\overline{F}$ என்பது $F_1 i + F_2 j + F_3 k$ என்றிருந்தால்,

$$\nabla \cdot \overline{F} = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1 i + F_2 j + F_3 k)$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

இவ்வாய்பாடு $\overline{F}$ எனும் வெக்டர் சார்பு கொடுக்கப்பட்டால் அதன் பாய்வு காணப் பயன்படும்.

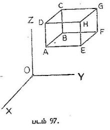
§ 7·18. ஒரு வெக்டரின் பாய்வுக்கு இயற்பியல் விளக்கம் (Physical interpretation of the Divergence of a vector)

மூவளவை வெளியின் ஒரு பகுதியில், இயங்கும் அரை நீர்மம் நிரம்பியுள்ளது எனக் கொள்வோம். $A\ (x,\ y,\ z)$ எனும் புள்ளியில் அரை நீர்மத்தின் திசைவேகம்

$$\overline{V} = V_x i + V_y j + V_z k\,;$$

எனும் வெக்டர் சார்பினால் குறிக்கப்பெறும் எனக் கொள்வோம். Aயில் ஒரு முனையை உடையதும், $dx,\ dy,\ dz$ என்ற நீளங்களை விளிம்புகளாய் உடையதுமான ஒரு செவ்வகத் திண்மத்தை எடுத்துக்

கொள்வோம். இத்திண்மத்தின் ஒரு முகத்தின் வழியாக ஓரலகு நேரத்தில் பாயும் அரை நீர்மத்தின் தோராய அளவு, அம்முகத்தின் பரப்பிணை, அதற்குச் செங்குத்தான திசையில் அரை நீர்மத்தின் திசை வேகத்தால் பெருக்கினுல் கிடைக்கும். படத்தில் காட்டியவாறு $ABCD$ என்ற முகத்தின் வழியே உள் நுழையும் அரை நீர்ம அளவு Δx, Δz, Vy. ($ABCD$ எனும் தளம் XOZ எனும் தளத்திற்கு இணையாயிருப்பதால் Vx, Vz என்ற திசை வேகக் கூறுகள், $ABCD$யின் வழி பாயும் அரை நீர்மத்தின் (fluid) அளவைப் பாதிப்பதில்லை).



படம் 97.

$EFGH$ என்ற முகத்தின் வழியே வெளியேறும் அளவு

$$\Delta x \, \Delta z \, Vy + \Delta y = \Delta x \, \Delta z \left\{ Vy + \frac{\partial Vy}{\partial y} \Delta y \right\}$$

எனவே OYக்குச் செங்குத்தான இருமுகங்களின் வழி பாய்வதினுல் ஏற்படும் குறைவு (decrease)

$$= \Delta x \, \Delta z \left\{ Vy + \frac{\partial Vy}{\partial y} \Delta y \right\} - \Delta x \, \Delta z \, Vy$$

$$= \frac{\partial Vy}{\partial y} \Delta x \, \Delta y \, \Delta z.$$

இதேபோன்று OZக்கு, OXக்குச் செங்குத்துத் தளங்களின் வழி பாய்வதாலும் $\frac{\partial Vz}{\partial z} \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$, $\frac{\partial Vx}{\partial x} \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$ எனும் குறைவுகள் ஏற்படும்.

∴ செவ்வகத் திண்மத்திலுள்ள அரை நீர்ம அளவில் ஓரலகு நேரத்தில் ஏற்படும் மொத்தக் குறைவு

$$\left(\frac{\partial Vx}{\partial x} + \frac{\partial Vy}{\partial y} + \frac{\partial Vz}{\partial z} \right) \Delta x \, \Delta y \, \Delta z.$$

∴ ஓரலகு கன அளவில், ஓரலகு நேரத்தில் ஏற்படும் மொத்தக் குறைவு $= \left(\frac{\partial Vx}{\partial x} + \frac{\partial Vy}{\partial y} + \frac{\partial Vz}{\partial z} \right) \frac{\Delta x \, \Delta y \, \Delta z}{\Delta x \, \Delta y \, \Delta z}$

$$= \frac{\partial Vx}{\partial x} + \frac{\partial Vy}{\partial y} + \frac{\partial Vz}{\partial z}$$

இதுதான் V எனும் சார்பின் பாய்வு என வரையறுக்கப்பட்டது. எனவே $\overline{V}$ என்பது ஓர் அரை நீர்மத்தின் திசை வேகத்தினைக் குறிக்கும் வெக்டர் எனில் $\nabla \cdot \overline{V}$ அல்லது $\overline{V}$ன் பாய்வு என்பது குறிப்பிட்ட புள்ளியில் ஓரலகு நேரத்தில் ஓரலகு கன அளவில் அவ்வரை நீர்மம் என்ன விகிதத்தில் பாய்கிறது என்பதைக் காட்டுகிறது. இதுபோன்ற விளக்கம் வேறு வெக்டர் களங்களுக்கும் பொருந்தும். எடுத்துக்காட்டாக $\overline{V}$ என்பது மின்விசைப் பாய்வைக் குறித்தால், $\nabla \cdot \overline{V}$ என்பது ஓரலகு நேரத்தில் ஓரலகு கன அளவிற்கு எவ்வளவு விசை பாய்கிறது என்பதைக் காட்டும். $\overline{V}$ என்பது வெப்பம் பாயும் வேகத்தைக் குறித்தால் $\nabla \cdot \overline{V}$ என்பது குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து வெப்பம் ஓரலகு கன அளவிற்கு என்ன விகிதத்தில் வெளியேற்றப் படுகிறது என்பதைக் காட்டும். பொதுவாக 'பாய்வு' என்ற இந்த வெக்டர் செயலி (Vector operator) ஒரு வெக்டர் புள்ளிச் சார்வு $\overline{F}$ ல் செயல்பட்டால் ஓரலகு கன அளவிற்கு என்ன விகிதத்தில் அவ் வியற்பியற் பொருள் அப்புள்ளியிலிருந்து வெளியேறுகிறது என்பதைக் காட்டும். எனவேதான் இதனை வெக்டரின் 'பாய்வு' என்கிறோம்.

அரை நீர்மம் அமுக்கப்பட இயலாததாயின் (incompressible fluid) நுண்ணிய செவ்வகத் திண்மத்தின் அளவுள்ள அரை நீர்மப் பகுதியில், கன அளவு இழப்போ, அதிகம் பெறுதலோ நடைபெற இயலாது. எனவே $\nabla \cdot V = \frac{\partial V x}{\partial x} + \frac{\partial V y}{\partial y} + \frac{\partial V z}{\partial z} = 0$. இதனைத்தான் அமுக்கப்பட இயலாத அரை நீர்மங்களின் தொடர்ச்சிச் சமன்பாடு (equation of continuity) என்கிறோம். பொதுவாக, மூவளவை வெளியின் சிறுதுகள் போன்ற நுண்ணிய பகுதியில் உள் நுழையும் இயற்பியற் பொருள் அளவு, வெளிச்செல்லும் பொருள் அளவிற்குச் சமமானால் $\nabla \cdot \overline{V} = 0$. இந்நியதிக்குட்பட்ட வெக்டர்களை (Solenoidal vectors) 'சுருள் உருளை வெக்டர்கள்' (ஸோல்னாய்டல் வெக்டர்) என்கிறோம்.

§ 7·19. ஒரு வெக்டரின் சுழல் (Curl of a vector)

$\overline{F}(x, y, z)$ என்பது மூவளவை வெளியின் ஒரு பகுதியில் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும், $\overline{F}(x, y, z)$க்கு மதிப்புகள் வரையறுக்கப் பட்டதும், வகைக்கெழு காணத்தக்கதுமான ஒரு வெக்டர் புள்ளிச் சார்பு எனில் $\nabla \times \overline{F}$ என்ற வெக்டர் $\overline{F}$ன் 'சுழல்' என அழைக்கப்படும். இதனை '$\nabla \times \overline{F}$' என்றும் 'சுழல் F' எனவும் எழுதலாம்.

$$\text{சுழல் } \overline{F} = \nabla \times \overline{F} = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \overline{F}$$

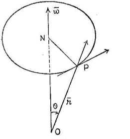
$$= i \times \frac{\partial \overline{F}}{\partial x} + j \times \frac{\partial \overline{F}}{\partial y} + k \times \frac{\partial \overline{F}}{\partial z}$$

$$\overline{F} = F_1 i + F_2 j + F_3 k \text{ எனில்,}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \overline{F} &= \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right) \times (F_1 i + F_2 j + F_3 k) \\
&= i \times j \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) + j \times k \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \\
&\quad + k \times i \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \\
&= i \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \\
&\quad + k \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\
&= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

அணிக்கோவையின் மதிப்புக் காணப் பெருக்கல் வரும்போது $\frac{\partial}{\partial y} \cdot F_3$ எனில் $\frac{\partial F_3}{\partial y}$ என்பது போன்ற விளக்கத்துடன் $\nabla \times \overline{F}$ன் மதிப்பு இவ்வணிக் கோவையினுல் கிடைக்கும்.

§ 7·20. வெக்டரின் சுழலுக்கு இயற்பியல் விளக்கம்



படம் 98.

ஒரு வெக்டரின் சார்பின் சுழல் எனப்படுவது வெக்டர் களத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் அமையும் கோணத்திசை வேகத்தின் அளவாகும் என நிறுவலாம். எடுத்துக் காட்டாக, ஒரு கட்டிறுக்கமான பொருளின் இயக்கத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். ஓர் அச்சைச் சுற்றி செகண்டுக்கு ω ஆரையன்கள் என்ற ஒரே சீரான கோணத்திசை வேகத்துடன் அப்பொருள் சுழல்வதாய்க் கொள்வோம். இக்கோண வேகத்தினை $\overline{\omega}$ என்ற வெக்டரால் குறிப்போம். இதன் எண்ணளவு ω ஆகவும், இதன்திசை சுழல் அச்சின் திசையாகவும் கொள்வோம். இவ்வச்சின்மீது O எனும் ஒரு புள்ளியும், கட்டிறுக்கப் பொருளில்

P என்ஞெரு புள்ளியும் எடுத்துக்கொள்க. PN என்பதைச் சுழல் அச்சிற்குச் செங்குத்தாக வரைவோம். Oவினை ஆதியாய்க்கொண்டு $\overline{OP}=\overline{r}$ என்க. பொருள் சுழல்கையில் Pயானது Nஐ மையமாகவும், NPயை ஆரமாகவும் உடைய வட்டத்தில் நகரும். அதாவது, OPக்கும் ONக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில், $OP \sin\theta = r \sin\theta$ என்ற ஆரத்துடன் கூடிய வட்டத்தில் OPN என்ற தளத்திற்குச் செங்குத்தாக நகரும். எனவே Pயின் நேர்கோட்டுத்திசை வேகம் (linear velocity)

$$= NP \cdot \omega = OP \sin\theta \cdot \omega$$

$$= \omega r \sin\theta$$

[OPயின் நீளம் r எனக் கொள்ளப்பட்டது]

இவ்வாறு Pயின் நேர்கோட்டுத் திசை வேகம் $\omega r \sin\theta$ என்ற மதிப்புடனும் OPNக்குச் செங்குத்தாக $\overline{\omega}$, $\overline{r}$ இவற்றுடன் வலக்கை அமைப்புடனும் விளங்குவதால்,

$$\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r}$$

Oவினை ஆதியாகக் கொண்டு Pயின் மூவளவை ஆயத்தொலைகள் (x, y, z) எனக் கொண்டால்,

$$\overline{r} = xi + yj + zk$$

மேலும் $\overline{\omega} = \omega_1 i + \omega_2 j + \omega_3 k$; என மூன்று கூறுகளாகப் பிரிக்க இயலும்.

$$\therefore \quad \overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= i(\omega_2 z - \omega_3 y) + j(\omega_3 x - \omega_1 z) + k(\omega_1 y - \omega_2 x)$$

$$\therefore \quad \nabla \times \overline{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix}$$

$$= i(\omega_1 - 0 - 0 + \omega_1) + j(\omega_2 - 0 - 0 + \omega_2) + k(\omega_3 - 0 - 0 + \omega_3)$$

$$= 2\omega_1 i + 2\omega_2 j + 2\omega_3 k$$

$$= 2\overline{\omega}$$

அதாவது சுழல் $\overline{V} = 2\overline{\omega}$

$\therefore$ கோணத் திசைவேகம் $\overline{\omega} = \frac{1}{2}$ சுழல் $\overline{V}$

இவ்விளக்கம் $\nabla \times \overline{V}$யைச் சுழல் $\overline{V}$ என்றழைப்பதின் பொருத்தத்தினையும் எடுத்துக் காட்டுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1: $\overline{r} = xi+yj+zk$; எனில் பாய்வு $\overline{r} = 3$; சுழல் $\overline{r} = 0$ எனக் காண்பி.

$$\text{பாய்வு } \overline{r} = \nabla \cdot \overline{r}$$

$$= \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (xi+yj+zk)$$

$$= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$= 1+1+1$$

$$= 3$$

$$\text{சுழல் } \overline{r} = \nabla \times \overline{r}$$

$$= \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (xi+yj+zk)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)$$

$$= 0$$

குறிப்பு: மேற்கண்ட இரு முடிவுகளும் வாய்பாடுகளாக மனதிற் கொள்ள வேண்டியவையாகும்.

எடுத்துக் காட்டு 2: $\overline{F} = (x-y)i+(y-z)j+(z-x)k$ எனில் பாய்வு $\overline{F}$ம் சுழல் $\overline{F}$ம் காண்க.

$$\text{பாய்வு } \overline{F} = \Delta \cdot \overline{F}$$

$$= \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \{(x-y)i+(y-z)j+(z-x)k\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x-y) + \frac{\partial}{\partial y}(y-z) + \frac{\partial}{\partial z}(z-x)$$

$$= 1+1+1=3$$

$$\text{சுழல் } \overline{F} = \nabla \times \overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-y & y-z & z-x \end{vmatrix}$$

$$= i\left\{\frac{\partial}{\partial y}(z-x)-\frac{\partial}{\partial z}(y-z)\right\}+j\left\{\frac{\partial}{\partial z}(x-y)-\frac{\partial}{\partial x}(z-x)\right\}$$

$$+k\left\{\frac{\partial}{\partial x}(y-z)-\frac{\partial}{\partial y}(x-y)\right\}$$

$$= i\,(1)+j(1)+k(1)$$

$$= i+j+k.$$

எடுத்துக்காட்டு 3 : $\overline{F}=\dfrac{xi+yj+zk}{r}$; $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

எனில் பாய்வு $\overline{F}$-ம், சுழல் $\overline{F}$-ம் காண்க.

$$\text{பாய்வு } \overline{F}=\nabla\cdot\overline{F}=\left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{xi+yj+zk}{r}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$=\frac{r\cdot 1-x\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^2}+\frac{r\cdot 1-y\dfrac{\partial r}{\partial y}}{r^2}+\frac{r\cdot 1-z\dfrac{\partial r}{\partial z}}{r^2}$$

$$=\frac{3r-\left(x\dfrac{\partial r}{\partial x}+y\dfrac{\partial r}{\partial y}+z\dfrac{\partial r}{\partial z}\right)}{r^2}$$

ஆனால் $r^2=x^2+y^2+z^2$

$$\therefore\ 2r\frac{\partial r}{\partial x}=2x;\ \therefore\ \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$$

அதேபோன்று $\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r}$; $\dfrac{\partial r}{\partial z}=\dfrac{z}{r}$;

$$\therefore\ \text{பாய்வு } \overline{F}=\frac{3r-\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{r}\right)}{r^2}$$

$$=\frac{3r^2-(r^2)}{r^3}$$

$$=\frac{2}{r}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\text{சுழல் } \overline{F} = \nabla \times \overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r}, & \frac{y}{r}, & \frac{z}{r} \end{vmatrix}$$

$$= i\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r}\right)\right\} + j\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r}\right)\right\} + k\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r}\right)\right\}$$

$$= i\left\{\frac{r(0) - z\frac{\partial r}{\partial y} - r(0) + y\frac{\partial r}{\partial z}}{r^2}\right\} + j\left\{\frac{r(0) - x\frac{\partial r}{\partial z} - r(0) + z\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}\right\} + k\left\{\frac{r(0) - y\frac{\partial r}{\partial x} - r(0) + x.\frac{\partial r}{\partial y}}{r^2}\right\}$$

$$= i\left\{\frac{\frac{yz}{r} - \frac{zy}{r}}{r^2}\right\} + j\left\{\frac{\frac{zx}{r} - \frac{xz}{r}}{r^2}\right\} + k\left\{\frac{\frac{xy}{r} - \frac{yx}{r}}{r^2}\right\}$$

$$= 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 4 : $\overline{F} = x^2yi + xzj + 2yzk$ எனில் பாய்வு (சுழல் $\overline{F}$)ன் மதிப்பு என்ன? {சுழல் $\overline{F}$ன் பாய்வு என்று வாசிக்கவும்}.

$$\Delta \times \overline{F} = \overline{F}\text{ன் சுழல்} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & xz & 2yz \end{vmatrix}$$

$$= i\left\{\frac{\partial}{\partial y}(2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right\} + j\left\{\frac{\partial}{\partial z}(x^2y) - \frac{\partial}{\partial x}(2yz)\right\} + k\left\{\frac{\partial}{\partial x}(xz) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right\}$$

$$= i(2z - x) + j(0 - 0) + k(z - x^2)$$

$$= i(2z - x) + k(z - x^2)$$

∴ சுழல் $\overline{F}$ன் பாய்வு

$$= \nabla \cdot \{i(2z - x) + k(z - x^2)\}$$

$$= \left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\{i\,(2z-x)+k\,(z-x^2)\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\,(2z-x)+\frac{\partial}{\partial z}\,(z-x^2)$$

$$= -1\;+1 = 0.$$

குறிப்பு: $\nabla\cdot\nabla\times\overline{F}$ என்பது $\overline{F}$ ஏதாமொரு வெக்டர் சார்பாயிருந்தாலும் பூச்சியமாகும் என்பது பொது விதி. அதனை இச்சிறு எடுத்துக்காட்டின் மூலம் விளக்கியுள்ளோம். இப்பெருக்கல் பூச்சியமாகும் என்பதை இன்னொரு வழியிலும் காணலாம். ∇ என்பது ஒரு வெக்டர்; $\overline{F}$ம் ஒரு வெக்டர்; எனவே $\nabla\cdot\nabla\times\overline{F}$ என்ற திசையிலி முப்பெருக்கத்தினை $\nabla\times\nabla\cdot\overline{F}$ என்றும் எழுதலாம். ஆனால் $\nabla\times\nabla=0$. எனவே இம்மதிப்புப் பூச்சியமாகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 5: $\overline{F} = x^2y\,i+y^2z\,j+z^2x\,k$ எனில், சுழல் $\overline{F}$ம், சுழல் $\overline{F}$ன் சுழலும் {i.e. சுழல் (சுழல் $\overline{F}$)} காண்க.

$$\text{சுழல் } \overline{F} = \nabla\times\overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & y^2z & z^2x \end{vmatrix}$$

$$= i\,(0-y^2)+j\,(0-z^2)+k\,(0-x^2)$$

$$= -\,(y^2i+z^2j+x^2k)$$

$$\text{சுழல் (சுழல் } \overline{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & -z^2 & -x^2 \end{vmatrix}$$

$$= i\,(0+2z)+j\,(0+2x)+k\,(0+2y)$$

$$= \mathbf{2zi+2xj+2yk}.$$

§ 7·21. விரிவு வாய்பாடுகள்: (Formulae of Expansion)

வெக்டர் பகுப்பாய்வில் பல இடங்களில் $u\overline{\varphi}$, $\overline{u}\times\overline{v}$ போன்ற திசையிலிச் சார்புகளும், வெக்டர் சார்புகளும் கலந்த சார்புகளின் பாய்வும், சுழலும் காணவேண்டி நேரிடும். அம்மாதிரி நேரங்களில் பயன்படுத்திக் கொள்ளத்தக்க விதத்தில் கீழ்க்காணும் வாய்பாடுகள் சிலவற்றை நிறுவுகிறோம்.

1. $\text{பாய்வு } (u\overline{v}) = \nabla\cdot(u\overline{v}) = \nabla u\cdot\overline{v}+u\,(\nabla\cdot\overline{v})$

$$= (\text{சரிவு } u)\cdot\overline{v}+u\;(\text{பாய்வு } \overline{v})$$

இங்கு u என்பது திசையிலிச் சார்பு ; $\overline{V}$ என்பது வெக்டர் சார்பு.

$$\nabla\cdot(u\overline{V}) = \left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(u\overline{V})$$

$$= i\cdot\frac{\partial}{\partial x}(u\overline{V})+j\cdot\frac{\partial}{\partial y}(u\overline{V})+k\cdot\frac{\partial}{\partial z}(u\overline{V})$$

$$= i\cdot\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\overline{V}+u\frac{\partial\overline{V}}{\partial x}\right\}+j\cdot\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\overline{V}+u\frac{\partial\overline{V}}{\partial y}\right\}+k\cdot\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\overline{V}+u\frac{\partial\overline{V}}{\partial z}\right\}$$

$$= \left(i\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial u}{\partial y}+k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\overline{V}+u\left(i\cdot\frac{\partial\overline{V}}{\partial x}+j\cdot\frac{\partial\overline{V}}{\partial y}+k\cdot\frac{\partial\overline{V}}{\partial z}\right)$$

$$= (\nabla u)\cdot\overline{V}+u(\nabla\cdot\overline{V})$$

2. சுழல் $(u\overline{V}) = \nabla\times(u\overline{V}) = \nabla u\times\overline{V}+u(\nabla\times\overline{V})$.

$$\nabla\times(u\overline{V}) = \left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(u\overline{V})$$

$$= i\times\frac{\partial}{\partial x}(u\overline{V})+j\times\frac{\partial}{\partial y}(u\overline{V})+k\times\frac{\partial}{\partial z}(u\overline{V})$$

$$= i\times\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\overline{V}+u\frac{\partial\overline{V}}{\partial x}\right\}+j\times\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\overline{V}+u\frac{\partial\overline{V}}{\partial y}\right\}$$

$$+k\times\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\overline{V}+u\frac{\partial\overline{V}}{\partial z}\right\}$$

$$= \left(i\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial u}{\partial z}+k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\times\overline{V}$$

$$+u\left(i\times\frac{\partial\overline{V}}{\partial x}+j\times\frac{\partial\overline{V}}{\partial y}+k\times\frac{\partial\overline{V}}{\partial z}\right)$$

$$= (\nabla u)\times\overline{V}+u(\nabla\times\overline{V})$$

3. பாய்வு $(\overline{u}\times\overline{V}) = \nabla\cdot(\overline{u}\times\overline{V}) = \overline{V}\cdot$ சுழல் $\overline{u}-\overline{u}\cdot$ சுழல் $\overline{V}$

$$= \overline{V}\cdot(\nabla\times\overline{u})-\overline{u}\cdot(\nabla\times\overline{V})$$

$$\nabla\cdot(\overline{u}\times\overline{V}) = \left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\overline{u}\times\overline{V})$$

$$= i\cdot\left\{\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}\times\overline{V}+\overline{u}\times\frac{\partial\overline{V}}{\partial x}\right\}+j\cdot\left\{\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}\times\overline{V}+\overline{u}\times\frac{\partial\overline{V}}{\partial y}\right\}+$$

$$k\cdot\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\times\overline{V}+\overline{u}\times\frac{\partial\overline{V}}{\partial z}\right\}$$

$$= \left(i \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \times \bar{V} + j \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \times \bar{V} + k \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \times \bar{V}\right) + \left(\bar{u} \times \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \cdot i + \bar{u} \times \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \cdot j + \bar{u} \times \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \cdot k\right)$$

$$= \left(i \times \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \cdot \bar{V} + j \times \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \cdot \bar{V} + k \times \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \cdot \bar{V}\right) + \bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \times i + \bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \times j + \bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \times k$$

$$= \left(i \times \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + j \times \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + k \times \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) \cdot \bar{V} - \bar{u} \cdot \left(i \times \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + j \times \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + k \times \frac{\partial \bar{V}}{\partial z}\right)$$

$$= (\nabla \times \bar{U}) \cdot \bar{V} - \bar{U} \cdot (\nabla \times \bar{V})$$

$$= \bar{V} \cdot (\nabla \times \bar{U}) - \bar{U} \cdot (\nabla \times \bar{V})$$

4. சுழல் $(\bar{U} \times \bar{V}) = \Delta \times (\bar{U} \times \bar{V})$

$= (\bar{V} \cdot \nabla)\bar{U} - (\bar{U} \cdot \nabla)\bar{V} + \bar{U}$ பாய்வு $\bar{V} - \bar{V}$ பாய்வு $\bar{U}$

சுழல் $(\bar{U} \times \bar{V}) = \nabla \times (\bar{U} \times \bar{V})$

$$= \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\bar{U} \times \bar{V})$$

$$= i \times \frac{\partial}{\partial x}(\bar{U} \times \bar{V}) + j \times \frac{\partial}{\partial y}(\bar{U} \times \bar{V}) + k \times \frac{\partial}{\partial z}(\bar{U} \times \bar{V})$$

$$= i \times \left\{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \times \bar{V} + \bar{u} \times \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}\right\} + j \times \left\{\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \times \bar{V} + \bar{u} \times \frac{\partial \bar{V}}{\partial y}\right\} + k \times \left\{\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \times \bar{V} + \bar{u} \times \frac{\partial \bar{V}}{\partial z}\right\}$$

$$= i \times \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \times \bar{V}\right) + i \times \left(\bar{u} \times \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}\right) + j \times \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \times \bar{V}\right) + j \times \left(\bar{u} \times \frac{\partial \bar{V}}{\partial y}\right) + k \times \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \times \bar{V}\right) + k \times \left(\bar{u} \times \frac{\partial \bar{V}}{\partial z}\right)$$

$$= (i \cdot \bar{V}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \left(i \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right) \bar{V} + \left(i \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}\right) \bar{u} - (i \cdot \bar{u}) \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + (j \cdot \bar{V}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \left(j \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \bar{V} + \left(j \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial y}\right) \bar{u} - (j \cdot \bar{u}) \frac{\partial \bar{V}}{\partial y}$$

$$+ (k \cdot \overline{V}) \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \left(k \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right) \overline{V} + \left(k \cdot \frac{\partial \overline{V}}{\partial z}\right) \overline{u} - (k \cdot \overline{u}) \frac{\partial \overline{V}}{\partial z}$$

$$= \left(i \cdot \frac{\partial \overline{V}}{\partial x} + j \cdot \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + k \cdot \frac{\partial \overline{V}}{\partial z}\right)\overline{u} - \left(i \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + j \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + k \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)\overline{V}$$

$$+ \overline{V} \cdot \left(i \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + j \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + k \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right) - \overline{u} \cdot \left(i \frac{\partial \overline{V}}{\partial x} + j \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + k \frac{\partial \overline{V}}{\partial z}\right)$$

$$= (\nabla \cdot \overline{V})\, \overline{u} - (\nabla \cdot \overline{u})\, \overline{V} + \overline{V} \cdot \nabla \overline{u} - \overline{u} \cdot \nabla \overline{V}.$$

5. சரிவு $(\overline{u} \cdot \overline{V}) = (\overline{V} \cdot \nabla)\, u + (\overline{u} \cdot \nabla)\, \overline{V} + \overline{V} \times$ சுழல் $\overline{u}$ $+ \overline{u} \times$ சுழல் $\overline{V}$

சரிவு $(\overline{u} \cdot \overline{V}) = \nabla(\overline{u} \cdot \overline{V})$

$$= \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}\right)(\overline{u} \cdot \overline{V})$$

$$= i \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u} \cdot \overline{V}) + j \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u} \cdot \overline{V}) + k \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u} \cdot \overline{V})$$

$$= i \left\{\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} \cdot \overline{V} + \overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{V}}{\partial x}\right\} + j \left\{\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \cdot \overline{V} + \overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{V}}{\partial y}\right\} + k$$

$$\left\{\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \cdot \overline{V} + \overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{V}}{\partial z}\right\}$$

$$= \overline{V} \cdot \left\{i \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + j \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + k \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right\} + \overline{u} \cdot \left\{j \frac{\partial \overline{V}}{\partial x} + j \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + k \frac{\partial \overline{V}}{\partial z}\right\}$$

$\overline{V} \times$ சுழல் $\overline{u} = \overline{V} \times \left\{i \times \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + j \times \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + k \times \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right\}$

$$= \left(\overline{V} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\right) i - (\overline{V} \cdot i) \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \left(\overline{V} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right) j - (\overline{V} \cdot j) \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$$

$$+ \left(\overline{V} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right) k - (\overline{V} \cdot k) \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$$

$$= \left(\overline{V} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\, i + \overline{V} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\, j + \overline{V} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} k\right)$$

$$- \left(\overline{V} \cdot i \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{V} \cdot j \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{V} \cdot k \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)$$

$\therefore\ \overline{V} \times$ சுழல் $\overline{u} + (\overline{V} \cdot \nabla)\, \overline{u} = \overline{V} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} i + \overline{V} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} j + \overline{V} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} k.$

இதேபோன்று

$$\overline{u} \times \text{சுழல்}\ \overline{V} + (\overline{u}\cdot\nabla)\,\overline{V} = \overline{u}\cdot\frac{\partial \overline{V}}{\partial x}\,i + \overline{u}\cdot\frac{\partial \overline{V}}{\partial y}\,j + \overline{u}\cdot\frac{\partial \overline{V}}{\partial z}\,k.$$

$$\therefore\quad \text{சரிவு}\ (\overline{u}\cdot\overline{V}) = \Sigma\ V\cdot\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\,i + \Sigma\ \overline{u}\cdot\frac{\partial \overline{V}}{\partial x}\,i$$

$$= (\overline{V}\cdot\nabla)\,\overline{u} + (\overline{u}\cdot\nabla)\,\overline{V} + \overline{V}\times\text{சுழல்}\ \overline{u}\times\text{சுழல்}\ \overline{V}.$$

§ 7·22. இரண்டாவது வரிசை வகைக் கெழுச் சார்புகள் (Second order differential functions)

V, $\overline{F}$ என்பன முறையே திசையிலி, வெக்டர் புள்ளிச் சார்புகள் என்க. அப்படியானால் ∇V, $\nabla\cdot\overline{F}$, $\nabla\times\overline{F}$ என்பனவும் புள்ளிச் சார்புகளாகும். ∇V, $\nabla\times\overline{F}$ என்பன வெக்டர் புள்ளிச் சார்புகள்; $\nabla\cdot\overline{F}$ என்பது திசையிலிப்புள்ளிச் சார்பு. எனவே ∇Vக்கும் $\nabla\times\overline{F}$க்கும் சுழலும், பாய்வும் காணமுடியும். $\nabla\cdot\overline{F}$க்குச் சரிவு மட்டும் காணலாம்.

பாய்வு (சரிவு V)	$\equiv \nabla\cdot\nabla V$	...... (1)
சுழல் (சரிவு V)	$\equiv \nabla\times(\nabla V)$	...... (2)
பாய்வு (சுழல் $\overline{F}$)	$\equiv \nabla\cdot(\nabla\times\overline{F})$	...... (3)
சுழல் (சுழல் $\overline{F}$)	$\equiv \nabla\times(\nabla\times\overline{F})$	...... (4)
சரிவு (பாய்வு $\overline{F}$)	$\equiv \nabla(\nabla\cdot\overline{F})$	...... (5)

என்ற சார்புகளைக் கவனிக்கவும். ∇, $\nabla_\circ$, ∇X என்ற செயலிகள் ஆயங்களைச் சாராத, மாற்றமிலாச்செயலிகள் (Invariant operators) ஆகும். மேற்கண்ட ஐந்தில், (2)வதும் (3)வதும் பூச்சியங்களாகும். ஏனெனில்,

$$\text{சுழல் (சரிவு } V) = \nabla\times(\nabla V)$$

$$= \nabla\times\left(i\frac{\partial V}{\partial x} + j\frac{\partial V}{\partial y} + k\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$= \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(i\frac{\partial V}{\partial x} + j\frac{\partial V}{\partial y} + k\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial V}{\partial x} & \dfrac{\partial V}{\partial y} & \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= i\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z\partial y}\right\} + j\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}\right\} + k\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x}\right\}$$

$$= 0$$

பாய்வு (சுழல் $\overline{F}$) $= \nabla\cdot(\nabla\times\overline{F})$

$$= \nabla\cdot\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \quad (\overline{F} = F_1 i + F_2 j + F_3 k \text{ எனில்})$$

$$= \nabla\cdot\left\{i\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)+j\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)+k\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right\}$$

$$= \left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left\{i\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)+j\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)+k\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 F_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 F_3}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 F_1}{\partial z\partial y}.$$

$$= 0.$$

இவ்விரண்டு முடிவுகளும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவையாகும். சுழல் $\overline{F}=0$ என ஒரு முடிவு கிடைக்குமானல், இவற்றினின்று $\overline{F}=$ சரிவு V எனுமாறு V எனும் திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பு ஒன்று காண இயலும். மேலும் சுழல் $\overline{F}=0$ எனில் $\overline{F}$ எனும் வெக்டர் சுழற்சியில்லா வெக்டர் (irrotational) எனப்படும். அதேபோல் பாய்வு $\overline{F}=0$ எனில் $\overline{F}$ என்பது வேறொரு வெக்டர் சார்பின் சுழலாக எழுதஇயலும்.

மேலும் பாய்வு (சரிவு V) $= \nabla\cdot(\nabla V)$

$$= \left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(i\frac{\partial V}{\partial x}+j\frac{\partial V}{\partial y}+k\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \text{ எனக் கிடைக்கும்.}$$

எனவே $\nabla\cdot\nabla V$ என்பதை $\nabla^2 V$ எனப் புள்ளிப் பெருக்கலில் எழுதுவது போன்று சுருக்கி எழுதுவது வழக்கம்.

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ என்ற வகைக்கெழு காணும்}$$

செயலி (Differential operator) லாப்ளாசின் செயலி (Laplace's operator) எனப்படும். இது அடிக்கடி கணித இயற்பியல் ஆய்வுகளில் இடம்பெறும். ∇^2 என்ற செயலியை ஒரு வெக்டர் புள்ளிச் சார்பின் மீதும் செயல்படுத்தலாம். ஆனல் $\Delta^2\overline{F}$

என்பதை $\frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \overline{F}}{\partial z^2}$ என்ற பொருளில் கையாள வேண்டும். ஏனெனில் $\nabla \cdot (\nabla \overline{F})$ என்பது வரையறுக்கப்படவில்லை.

நான்காவது சார்பாகிய {சுழல் (சுழல் $\overline{F}$)} என்பதன் மதிப்பை இப்போது காண்போம்.

$$\text{சுழல் } \overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= i\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)+j\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)+k\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$\therefore \text{ சுழல் (சுழல் } \overline{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}, & \frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}, & \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= i\left\{\frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial x}-\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial z \partial x}\right\}+$$

$$j\left\{\frac{\partial^2 F_3}{\partial z \partial y}-\frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}\right\}+$$

$$k\left\{\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z}-\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z}\right\}$$

$$= i\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right\}+j\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right\}+$$

$$k\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial y}\right\}-i\left\{\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}\right\}$$

$$-j\left\{\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}\right\}-k\left\{\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}\right\}$$

$$= \nabla(\nabla \cdot \overline{F})-\nabla^2 \overline{F}$$

$$= \text{சரிவு (பாய்வு } \overline{F})-\nabla^2 \overline{F}$$

இதனை மூன்று வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கலின் விரிவினை எழுதும் முறைப்படி நினைவிற் கொண்டு எழுதலாம்.

i.e. $\nabla \times (\nabla \times F) = \Delta(\nabla \cdot F)-(\nabla \cdot \nabla)\overline{F}$.

$\overline{U} \cdot \nabla \overline{V}$ன் விளக்கம்

∇ என்பது ஒரு வெக்டர் செயலி எனவே $\overline{U} \cdot \nabla$ என்பது ஒரு

திசையிலா அளவுருப் பெருக்கல். இதன்மூலம் கிடைப்பது திசையிலி களாலான ஒரு செயலியாகும். ஏனெனில்

$$\overline{U} \cdot \nabla = (iUx + jUy + kUz) \cdot \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$= Ux\frac{\partial}{\partial x} + Uy\frac{\partial}{\partial y} + Uz\frac{\partial}{\partial z}$$

எனவே $(\overline{U} \cdot \nabla)\ \overline{V}$ என்பது $\left(Ux\frac{\partial}{\partial x} + Uy\frac{\partial}{\partial y} + Uz\frac{\partial}{\partial z} \right)\overline{V}$

$$= Ux\frac{\partial \overline{V}}{\partial x} + Uy\frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + Uz\frac{\partial \overline{V}}{\partial z}$$ ஆகும்.

இதேபோன்று φ என்பது ஒரு திசையிலி புள்ளிச் சார்பு எனில்

$$(U \cdot \nabla)\varphi = \left(Ux\frac{\partial}{\partial x} + Uy\frac{\partial}{\partial y} + Uz\frac{\partial}{\partial z} \right)\varphi$$

$$= Ux\frac{\partial \varphi}{\partial x} + Uy\frac{\partial \varphi}{\partial y} + Uz\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$= U \cdot (\nabla \varphi)$$

∴ $U \cdot \nabla \overline{V}$ என அடைப்பின்றி எழுதினாலும், $\nabla \overline{V}$ என்பதற்குப் பொருள் இல்லையாதலின் $(\overline{U} \cdot \nabla)\ \overline{V}$ எனப்புரிந்து கொள்ளவேண்டும். φ எனும் திசையிலிச் சார்பு கொடுக்கப்பட்டால் $(\overline{U} \cdot \nabla)\ \varphi$ என்பதும் $\overline{U} \cdot (\nabla\varphi)$ என்பதும் ஒரு பொருளுடையவையே!

§ 7·23. சுருள் உருளைக் களமும் சுழற்சியில்லாக் களமும் (Solenoidal and irrotational fields)

ஒரு வெக்டர் களத்தில் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ஒரு வெக்டரின் பாய்வு பூச்சியமானால், அக்களம் (Solenoidal) சுருள் உருளைக் களம் எனப்படும். பாய்வு $\overline{V} = 0$ எனில் $\overline{V}$ எனும் வெக்டர் ஒரு சுருள் உருளைக் களத்தினை நிர்ணயிக்கும். ஏற்கனவே பாய்வு (சுழல் $\overline{F}$) $= 0$ எனக் கண்டோம். எனவே $\overline{V}$ என்பது வேறொரு வெக்டர் சார்பு $\overline{F}$ன் சுழல் மதிப்பாயிருக்கலாம். அதாவது $\overline{V} =$ சுழல் $\overline{F}$. அதாவது சுருள் உருளைக் களம் ஒன்றில் வெக்டர் $\overline{V}$யை வேறொரு வெக்டர் $\overline{F}$ன் சுழலாக எழுத இயலும். இது அக்களத்தின் இயல்புகளில் முக்கியமான ஒன்றாகும்.

ஒரு வெக்டர்களத்தில் ஒரு வெக்டரின் சுழல் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் பூச்சியமானால், அக்களம் 'சுழற்சியில்லாக் களம்' (irrotational field) எனப்படும். சுழல் $\overline{V}=0$ எனில், $\overline{V}$ எனும் வெக்டர், சுழற்சி

யில்லாக் களம் ஒன்றினை நிர்ணயிக்கும். முன்பே சுழல் (சரிவு ϕ) = 0 என ஒரு திசையிலிச் சார்பு ϕக்கு நிறுவினோம். அதைக்கொண்டு $\overline{V}$, ஒரு திசையிலா அளவுருப் புள்ளிச் சார்பின் சரிவாக இருக்கலாம் என்ற முடிவுக்கு வருகிறோம். எனவே சுழற்சியில்லாக் களம் எனில் அதில் உள்ள வெக்டர் $\overline{V}$யை வேறொரு திசையிலிப் புள்ளிச்சார்பின் சரிவாக எழுத இயலும். எனவே திசையிலிக்களம் ϕ-யிலிருந்து வெக்டர்களம் $\overline{V}$-யினை உருவாக்க இயலும். $\overline{V}$ என்பது 'காப்புநிலை வெக்டர் களம்' **(Conservative Vector field)** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1: $\overline{F} = 3y^4z^2i + 4x^3z^2j - 3x^2y^2k$, எனும் வெக்டர் சுருள் உருளைக்களத்தினைச் சார்ந்தது எனக் காண்பி.

$$\text{பாய்வு } \overline{F} = \text{பாய்வு } (3y^4z^2i + 4x^3z^2j - 3x^2y^2k)$$
$$= \nabla \cdot (3y^4z^2i + 4x^3z^2j - 3x^2y^2k)$$
$$= \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(3y^4z^2i + 4x^3z^2j - 3x^2y^2k)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(3y^4z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(4x^3z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-3x^2y^2)$$
$$= 0+0+0$$
$$= 0$$

பாய்வு $\overline{F} = 0$ ஆகையால், $\overline{F}$ எனும் வெக்டர் சுருள் உருளைக் களத்தைச் சார்ந்தது.

எடுத்துக்காட்டு 2: $\overline{F} = (x+3y)\,i + (y-2z)\,j + (x+az)\,k$ எனும் வெக்டர் சுருள் உருளைக்களத்தினைச் சார்ந்ததாயிருக்க 'a'யின் மதிப்பு என்னவா யிருக்கவேண்டும்?

$$\text{பாய்வு } \overline{F} = \nabla \cdot \overline{F} = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\overline{F}$$
$$= \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\{(x+3y)\,i + (y-2z)\,j + (x+az)k\}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(x+3y) + \frac{\partial}{\partial y}(y-2z) + \frac{\partial}{\partial z}(x+az)$$
$$= 1+1+a.$$

ஆனால் சுருள் உருளைக் களத்தைச் சார்ந்த வெக்டராயின்

பாய்வு $\overline{F} = 0$; i.e. $2+a=0$

i.e. $a = -2$

எடுத்துக்காட்டு 3 : $\overline{F}=(6xy+z^3)i+(3x^2-z)j+(3xz^2-y)k$; எனும் வெக்டர் சுழற்சியில்லா வெக்டர் எனக் காண்பி. φ எனும் திசையிலிப் புள்ளிச்சார்பு ஒன்று $\overline{F}=\nabla\varphi$ எனுமாறு காண்க.

$$\overline{F}=(6xy+z^3)\,i+(3x^2-z)\,j+(3xz^2-y)\,k\,;$$

$$\therefore\ \text{சுழல்}\ \overline{F}=\nabla\times\overline{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 6xy+z^3, & 3x^2-z, & 3xz^2-y \end{vmatrix}$$

$$=i\left\{\frac{\partial}{\partial y}(3xz^2-y)-\frac{\partial}{\partial z}(3x^2-z)\right\}+$$

$$j\left\{\frac{\partial}{\partial z}(6xy+z^3)-\frac{\partial}{\partial x}(3xz^2-y)\right\}+$$

$$k\left\{\frac{\partial}{\partial x}(3x^2-z)-\frac{\partial}{\partial y}(6xy+z^3)\right\}$$

$$=i\,\{-1+1\}+j\,\{3z^2-3z^2\}+k\,\{6x-6x\}=0$$

எனவே $\overline{F}$ சுழற்சியில்லா வெக்டர் களத்தினைச் சாரும்.

$$\nabla\varphi=i\frac{\partial\varphi}{\partial x}+j\frac{\partial\varphi}{\partial y}+k\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$=\overline{F}\ \text{எனில்}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=6xy+z^3 \qquad \dots(1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=3x^2-z \qquad \dots(2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=3xz^2-y \qquad \dots(3)$$

(1)லிருந்து $\varphi=3x^2y+z^3x+x$ இல்லாத மாறிலி.

(2)லிருந்து $\varphi=3x^2y-zy+y$ இல்லாத மாறிலி.

(3)லிருந்து $\varphi=xz^3-yz+z$ இல்லாத மாறிலி.

$\therefore$ φயின் மதிப்பு $3x^2y+z^3x-yz+(x,y,z)$ இல்லாத ஏதேனு மொரு மாறிலி என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4 : φ,ψ என்பன வகையிடத்தக்க திசையிலிக் களங்கள் எனில் (Differentiable Scalar fields) $\nabla\varphi\times\nabla\psi$ என்பது சுருள் உருளைக்களம் எனக்காண்பி.

$$\text{பாய்வு}\ (\overline{U}\times\overline{V})=\overline{V}\,.\,\text{சுழல்}\ \overline{U}-\overline{U}\,.\,\text{சுழல்}\ \overline{V}$$

$$\therefore \text{ பாய்வு } \{\nabla\varphi \times \nabla\psi\} = \nabla\psi \cdot \{\text{சுழல் } \nabla\varphi\} - \nabla\varphi \cdot \text{சுழல் } \nabla\psi$$
$$= \nabla\psi \cdot \{\nabla \times (\nabla\varphi)\} - \nabla\varphi \cdot \{\nabla \times \nabla\psi\}$$

ஆனால் $\nabla\varphi = \varphi$ ன் சரிவு

$\nabla \times (\nabla\varphi) = \varphi$ ன் சரிவின் சுழல்

$= 0$

அதேபோல் $\nabla \times (\nabla\psi) = 0$

$\therefore$ பாய்வு $\{\nabla\varphi \times \nabla\psi\} = 0$

$\therefore$ $\nabla\varphi \times \nabla\psi$ என்பது சுருள் உருளைக் களம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 : $r^n \bar{r}$ என்பது n ன் எம்மதிப்பிற்கும் சுழற்சியில்லா வெக்டர் எனவும், $n = -3$ என்றால் மட்டிலுமே சுருள் உருளை வெக்டர் எனவும் காண்பி.

பாய்வு $r^n \bar{r} = \nabla \cdot (r^n \bar{r})$

$$= \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot r^n (xi + yj + zk)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(r^n x) + \frac{\partial}{\partial y}(r^n y) + \frac{\partial}{\partial z}(r^n z)$$

$$= \left(nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x}x + r^n\right) + \left(nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial y}y + r^n\right) + \left(nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial z} + r^n\right)$$

$$= nr^{n-1}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{r}\right) + 3r^n \qquad \left\{ \because \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \ \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \right\}$$

$$= nr^{n-1}\frac{r^2}{r} + 3r^n$$

$$= (n+3)\, r^n$$

எனவே $\nabla \cdot (r^n \bar{r}) = 0$ எனில் $n + 3 = 0$

i.e. $n = -3$

அதாவது $r^n \bar{r}$ சுருள் உருளை வெக்டராயிருக்க வேண்டுமானால் $n = -3$ என இருக்கவேண்டும்.

மேலும் $\nabla \times (r^n \bar{r}) = \nabla \times (xi + yj + zk)\, r^n$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xr^n & yr^n & zr^n \end{vmatrix}$$

$$= i\left\{nr^{n-1}z\frac{\partial r}{\partial y}-nr^{n-1}y\frac{\partial r}{\partial z}\right\}+j\left\{nr^{n-1}x\frac{\partial r}{\partial z}-nr^{n-1}z\frac{\partial r}{\partial x}\right\}$$
$$+k\left\{nr^{n-1}y\frac{\partial r}{\partial x}-nr^{n-1}x\frac{\partial r}{\partial y}\right\}$$
$$= nr^{n-1}\left\{i\left(z\frac{\partial r}{\partial y}-y\frac{\partial r}{\partial z}\right)\right\}+nr^{n-1}\left\{j\left(x\frac{\partial r}{\partial z}-z\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right\}$$
$$+nr^{n-1}\left\{k\left(y\frac{\partial r}{\partial x}-x\frac{\partial r}{\partial y}\right)\right\}$$
$$= nr^{n-1}\left\{i\left(z\frac{y}{r}-y\frac{z}{r}\right)+j\left(x\frac{z}{r}-z\frac{x}{r}\right)+k\left(y\frac{x}{r}-x\frac{y}{r}\right)\right\}$$
$$= 0 \text{ முற்றிலுமாக.} \quad \left\{\because \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\ \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\ \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}\right\}$$

எனவே nன் எம்மதிப்புக்கும் சுழல் $(r^n\bar{r})=0$ ஆவதால் $r^n\bar{r}$ ஒரு சுழற்சியிலா வெக்டர் ஆகும்.

பயிற்சி 7—(2)

1. $U=x^2+y^2+z^2$ எனில் சுழல் (∇U)ன் மதிப்பு என்ன?

2. $\overline{F}=x^2yi+xzj+2yzk$ எனில் பாய்வு (சுழல் $\overline{F}$) மதிப்பைக் காண்க.

3. $\overline{F}=x^2yi+y^2zj+z^2xk$, எனில் சுழல் $\overline{F}$; சுழல் (சுழல் $\overline{F}$)-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

4. கீழ்க்காணும் சார்புகளின் பாய்வுகளும் சுழல்களும் காண்க.

(i) $(x^2+yz)i+(y^2+zx)j+(z^2+xy)k$
(ii) $x\cos i+y\log xj-z^2k$
(iii) $xyzi+3x^2yj+(xz^2-y^2z)k$
(iv) $(2z-3y)i+(3x-z)j+(y-2x)k$
(v) $xy^2zi+xyz^2j+x^2yzk$
(vi) $\nabla(x^3+y^3+z^3-3xyz)$
(vii) $\nabla(yz+zx+xy)$

5. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளில் கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்குப் பாய்வும் சுழலும் காண்க:

(i) $\overline{F}=x^2i+y^2j+z^2k$; புள்ளி (1, 1, 1)
(ii) $\overline{F}=(3x^2y-z^2)i+(xy^2+yz^3)j+xyzk$; புள்ளி (1, 1, 1)
(iii) $\overline{F}=xyzi+xyz^2j+x^2yzk$; (1, 2, 1)
(iv) $\overline{F}=(2z-3y)i+(3x-z)j+(y-2x)k$; புள்ளி (1, −1, 4)
(v) $\overline{F}=\frac{x}{r}i+\frac{y}{r}j+\frac{z}{r}k$; $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, புள்ளி (1, 2, 2)

6. $\overline{F} = x^2zi - 2y^3z^3j + xy^2zk$, எனில் $\nabla \cdot \overline{F}$ன் மதிப்பு $(1, -1, 2)$ எனும் புள்ளியில் என்ன ?

7. $\overline{F} = x^2yi - 12xzj + 2yzk$, எனில் சுழல் (சுழல் $\overline{F}$) மதிப்பு என்ன ?

8. $\overline{F} = (x+y+1)\, i + j - (x+y)k$, எனில் $\overline{F}$. சுழல் $\overline{F}$ பூச்சிய மாகும் எனக் காண்பி.

9. $\overline{F} = (x+3y)i + (y-2z)j + (x+az)k$; எனும் வெக்டர் சுருள் உருளைக் களமானால் 'a'யின் மதிப்பு என்ன ?

10. $\overline{F} = yzi + zxj + xyk$, சுழற்சியில்லாதது என நிறுவுக.

11. $\nabla^2(r^n) = n(n+1)r^{n-2}$ எனக் காண்பி.

12. $\varphi = xyz$ எனில் சுழல் (சரிவு φ) பூச்சியமாகிறதா எனச் சரிபார்.

13. $\overline{F}$ என்பது சுருள் உருளைக் கள வெக்டராயின், சுழல் சுழல் சுழல் சுழல் $\overline{F} = \nabla^2\nabla^2\overline{F} = \nabla^4\overline{F}$ என நிறுவுக.

14. $\overline{F} = (x+2y+az)i + (bx-3y-z)j + (4x+cy+2z)k$; எனும் வெக்டர் சுழற்சியில்லாததானால் a, b, cயின் மதிப்புகள் என்ன ? $\overline{F}$ஐ ஒரு திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பின் சரிவாக எழுதலாம் எனக் காண்பி.

15. $\overline{F} = e^z[(2y+3z)i + 2j + 3k]$ என்ற சார்புக்குச் சுழல் $\overline{F} = 0$ என நிறுவுக. $f(xyz)$ எனும் ஒரு சார்பு $\overline{F} =$ சரிவு f எனுமாறு காண்க.

16. மிகவும் பொதுப்படையான வகையிடத் தக்க $f(r)$ என்ற ஒரு சார்பு $f(r)\overline{r}$ சுருள் உருளைக் களத்திலமையுமாறு காண்க.

17. $\overline{A}$, $\overline{B}$ எனும் இரு வெக்டர்கள் சுழற்சியில்லாதன எனில் $\overline{A} \times \overline{B}$ என்பது சுருள் உருளைக் களத்தினைச் சாரும் எனக்காட்டு.

18. சுழல் $f(r)\,\overline{r} = 0$ எனக் காண்பி.

19. $\overline{F} = (axy - z^3)\, i + (a-2)\, x^2j + (1-a)\, xz^2k$ எனும் சார் பின் சுழல் முற்றிலும் பூச்சியமானால் 'a'யின் மதிப்பு என்ன ?

20. $\overline{r} = xi + yj + zk$, $\varphi = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ எனில் $\overline{r} \cdot \Delta\varphi$ன் மதிப்பு என்ன ?

21. $\nabla \cdot (u\nabla v - v\Delta u) = u\nabla^2 v - v\nabla^2 u$ என நிறுவுக.

22. சுழல் $(\varphi\nabla\varphi) = 0$ என நிறுவுக.

23. $\overline{\omega}$ என்பது மாறிலி வெக்டர் ; $\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r}$ எனில் பாய்வு $\overline{V} = 0$ என நிறுவுக.

24. $\nabla \times (\varphi_1 \nabla \varphi_2) = \nabla\varphi_1 \times \Delta\varphi_2 = -\nabla \times (\varphi_2 \nabla \varphi_1)$ எனக் காண்பி.

25. $\nabla^2 f(r) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r}$; $\nabla^2 f(r) = 0$ எனில் $f(r) = A + \dfrac{B}{r}$ (A, B விருப்பு மாறிலிகள்) என நிறுவுக.

26. $\overline{F} = x\cos zi + y\log xj - z^2 k$ எனில் $\nabla\cdot\overline{F}$, $\nabla\times\overline{F}$ ஆகியவற்றின் மதிப்பு என்ன?

27. $\overline{F} = xy\sin zi + y^2\sin xj + z^2\sin yk$ எனில் $\nabla\cdot\overline{F}$ன் மதிப்பை $\left(0, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ என்ற புள்ளியில் கணக்கிடுக.

28. $\nabla\cdot\left(\dfrac{\overline{r}}{r^3}\right) = 0$ எனக் காண்பி.

29. $\overline{a}$ என்பது மாறிலியான ஒரு வெக்டர் எனில்,

(i) $\nabla\cdot(\overline{a}\times\overline{r}) = 0$; (ii) $\nabla\times(\overline{a}\times\overline{r}) = 2\overline{a}$ எனக் காண்பி.

30. $\overline{F} = (\overline{a}\times\overline{r})r^n$ எனில், (i) பாய்வு $\overline{F} = 0$; (ii) சுழல் $\overline{F} = (n+2)r^n\,\overline{a} - nr^{n-2}(\overline{a}\cdot\overline{r})\overline{r}$ என நிறுவுக.

31. $\overline{r} = xi + yj + zk$ என்பது $P(x, y, z)$ எனும் புள்ளியின் நிலை வெக்டர் எனில் $\nabla\cdot\left\{\dfrac{f(r)\overline{r}}{r}\right\}$-ன் மதிப்பு என்ன?

32. $\overline{A} = xz^3 i - 2x^2yzj + 2yz^4 k$ எனில் சுழல் $\overline{A}$யின் மதிப்பை $(1, -1, 1)$ எனும் புள்ளியிற் காண்க.

33. $\overline{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$; எனில், $\nabla\cdot\overline{v} = \nabla v_1\cdot i + \nabla v_2\cdot j + \nabla v_3\cdot k$ எனவும், $\nabla\times\overline{v} = \nabla v_1\times i + \nabla v_2\times j + \nabla v_3\times k$ எனவும் நிறுவுக.

34. $\overline{a}$ என்பது மாறிலியான வெக்டர் எனில்,

சுழல் $\left(\dfrac{\overline{a}\times\overline{r}}{r^3}\right) = \dfrac{-\overline{a}}{r^3} + \dfrac{3(\overline{a}\cdot\overline{r})\overline{r}}{r^5}$ என நிறுவுக.

35. $\overline{a}$ என்பது மாறிலியான வெக்டர் எனில்,

(i) $\nabla(\overline{a}\cdot\overline{u}) = (\overline{a}\cdot\nabla)\overline{u} + \overline{a}\times$சுழல் $\overline{u}$.

(ii) $\nabla\cdot(\overline{a}\times\overline{u}) = -\overline{a}\cdot$ சுழல் $\overline{u}$.

(iii) $\nabla\times(\overline{a}\times\overline{u}) = \overline{a}$ பாய்வு $\overline{u} - (\overline{a}\cdot\nabla)\overline{u}$ என நிறுவுக.

36. $\overline{a}$ என்பது மாறிலியான வெக்டர் எனில்,

$\overline{a}\cdot[\nabla(\overline{V}\cdot\overline{a})$ − சுழல் $(\overline{V}\times\overline{a})]$ = பாய்வு $\overline{V}$ என நிறுவுக.

37. $(\overline{V}\cdot\triangle) = \frac{1}{2}\nabla\overline{V}^2 - \overline{V}\times$சுழல் $\overline{V}$ எனக் காண்பி.

38. $\overline{V} = (x+y+1)i + j + (-x-y)k$ எனில், $\overline{V}\cdot(\nabla\times\overline{V}) = 0$ எனக் காண்பி.

8. தொகை காணல் (Integration)

§ 8·01. வகைக்கெழு காண்பதன் தலைகீழ் முறையே தொகை காணுதல் ஆகும். அதாவது $\overline{r}$ எனும் ஒரு வெக்டர் சார்பு, திசையிலி மாறி tயின் சார்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளபோது, $\overline{F}$ எனும் வேறொரு tயின் வெக்டர் சார்பை, அதன் tஐப் பொறுத்த வகைக்கெழு $\overline{r}$ஆக இருக்குமாறு கண்டுபிடிப்பதைத்தான் $\overline{r}$ன் t ஒட்டிய தொகை காணுதல் என்கிறோம். $\overline{F}$ எனும் சார்பு, $\overline{r}$ன் ஒரு தொகை எனவும், முதற் சார்பு (Primitive) எனவும் அழைக்கப்பெறும். இதனை

$\overline{F} = \int \overline{r}\, dt$ எனும் குறியீட்டினால் குறிக்கிறோம். $\int$ என்பது தொகை காணும் குறியீடு. t என்பது தொகைக்குரிய மாறிலி. $\overline{r}$ எனும் சார்பு தொகுக்கப்படும் சார்பு (Integrand) இத்தொடர்பின் பொருள் $\frac{d\overline{F}}{dt} = \overline{r}$ என்பதாகும். அதாவது தொகையின் வகைக்கெழு தொகுக்கப் படும் சார்பாகும். இவ்வாறு காணப்படும் தொகையின் மதிப்பான $\overline{F}$, வரையறுக்கப்படாத, அல்லது அளவுபடாத, அல்லது தேராத்தொகை (indefinite integral) எனப்படும். ஏனெனில் $\overline{c}$ என்பது ஒரு மாறிலி யான வெக்டர் எனில், $\overline{F}+\overline{c}$யின் வகைக்கெழுவும் $\overline{F}$ன் வகைக்கெழு வும் ஒன்றேயாகும். எனவே தொகையாக $\overline{F}$ எழுதினாலும், $\overline{F}+\overline{c}$ எழுதினாலும் பொருந்துமல்லவா? எனவேதான் இதனைத் தேராத் தொகை (indefinite integral) என்கிறோம். $\overline{c}$ என்ற மாறிலி வெக்டரை விருப்பு மாறிலி (arbitrary constant) என்னும் தொகை யீட்டின் மாறிலி (constant of integration) எனவும் அழைக்கிறோம். குறிப்பிட்ட சில கணக்குகளில் கொடுக்கப்பட்ட சில கட்டுப்பாடுகளுக் கேற்ப, இம்மாறிலி மதிப்பு கண்டறியப்படும். முன்பே நாம் வரை யறுத்த சில முடிவுகளின்படி கீழ்க்காணும் சில வாய்பாடுகள் பெறப்படு கின்றன.

$$\text{(i)} \int \left(\overline{r} \cdot \frac{d\overline{s}}{dt} + s \cdot \frac{d\overline{r}}{dt}\right) dt = \overline{r} \cdot \overline{s}+c$$

$$\text{(ii)} \int 2\,\overline{r} \cdot \frac{d\overline{r}}{dt}\; dt = \overline{r} \cdot \overline{r} +c = \overline{r}^2 + c$$

(iii) $\int 2\,\frac{d\bar{r}}{dt}\cdot\frac{d\bar{r}^2}{dt^2}\,dt = \frac{d\bar{r}}{dt}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}+c = \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2+c$

(iv) $\int \bar{r}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\,dt = \bar{r}\times\frac{d\bar{r}}{dt}+c$

(v) $\int \left(\frac{1}{r}\frac{d\bar{r}}{dt}-\frac{dr}{dt}\,\frac{\bar{r}}{r^2}\right)dt = \frac{\bar{r}}{r}+\bar{c}$

(vi) $\bar{a}$ என்பது மாறிலி வெக்டராயின்,

$$\int \bar{a}\times\frac{d\bar{r}}{dt}\,dt = \bar{a}\times\bar{r}+\bar{c}$$

தொகுக்கப்படும் சார்பின் தன்மையைப் பொறுத்து விருப்பு மாறிலி அமையும். அது திசையிலா அளவுருவாயின் c-யும் அவ்வாறே திசையிலியாய் அமையும். அது வெக்டராயின், c-யும் வெக்டராகும். எனவேதான் மேற்கண்ட வாய்பாடுகளில் (1), (2), (3)-ல் c-யும், (4), (5), (6)-ல் $\bar{c}$-யும் எழுதப்பெற்றுள்ளன. முதல் மூன்றில் c திசையிலி, பிந்திய மூன்றில் வெக்டர்.

$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -n^2\bar{r}$ என்ற சமன்பாட்டினைக் கொடுத்து t ஒட்டிய தொகை காணவேண்டுமானால், இருபுறமும் $2\,\frac{d\bar{r}}{dt}$ எனும் வெக்டரால் புள்ளிப் பெருக்கல் செய்து, பின்னர் t ஒட்டிய தொகை காண முயலுதல் வேண்டும்.

அதாவது $\int 2\,\frac{d\bar{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\,dt = -n^2\int 2\,\frac{d\bar{r}}{dt}\cdot\bar{r}\,dt$

i.e. $\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right)^2 = c - n^2\bar{r}^2$; c ஏதாமொரு மாறிலி.

இதனின்றும் $\frac{d\bar{r}}{dt}$-ன் எண்ணளவினை $\bar{r}$-ன் மதிப்பில் காண இயலும்.

§ 8·02. வரையறுத்த தொகைகள் (Definite Integrals)

$\bar{f}\,(t)$ என்பது திசையிலி மாறி t-யின் (a, b) எனும் மதிப்புகளுக்கிடைப்பட்ட இடைவெளியில் முடிவுள்ள, தொடர்ச்சியான ஒரு வெக்டர் சார்பு என்க. $\bar{b}-\bar{a}$ எனும் இடைவெளியை δt, δt_2, $\delta t_3 \ldots \delta t_n$ எனும் t-யின் சிறு சிறு கூடுதல்களுக்குத் தக்க (increment) சிறு சிறு இடைவெளிகளாகப் பிரிக்கவும். முதல் இடைவெளியில் t_1ம், இரண்டாவதில் t_2வும், மூன்றாவதில் t_3ம் என ... ஏதோ ஒரு மதிப்பினை ஒவ்வொரு இடைவெளியிலும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$S=\delta t_1\overline{f}(t_1)+\delta t_2\overline{f}(t_2)+\ldots\ldots\delta t_n\overline{f}(t_n)$$

என்ற கூட்டல் தொகையைக் கவனிப்போம். சிறு இடைவெளிகளின் எண்ணிக்கை அளவிறந்ததாய்ப் பெருகி, tயின் கூடுதல்கள் δt பூச்சியத்தை நாடும்போது, S-ன் எல்லை, '$b-a$' என்ற இடைவெளி பிரிக்கப்பட்ட முறையைச் சாராத ஒரு வரையறுக்கப்பட்ட முடிவுள்ள தொகையாகும். இவ்வெல்லைத் தொகை $\overline{f}$ (t)-ன் வரையறுக்கப்படாத தேராத் தொகை மதிப்பான $\overline{F}$ (t)-ன், $t=b$, $t=a$, எனும் இருமதிப்புகளுக்குத் தகுந்த வேறுபாடாகும். அதாவது $Lt S = \overline{F}(b)-F(\overline{a})$. இதனைத் தான் $\overline{a}$க்கும் $\overline{b}$க்கும் இடையில் $\overline{f}$ (t)யின் வரையறுக்கப்பட்ட தொகை (definite integral) என்கிறோம்.

குறியீட்டில் $\int_a^b \overline{f}\,(t)\,dt$ எனக் குறிக்கிறோம்.

இதனை $\int_a^b \overline{f}\,(t)\,dt = Lt \sum_a^b \overline{f}\,(t)\,\delta(t) = \overline{F}(b)-\overline{F}(a)$

என எழுதலாம். இப்போது $\overline{f}$ (t) எனப்படுவது δt எனும் கூடுதலுக்குத் தகுந்த சிறு இடைவெளியில் உள்ள ஏதோ ஒரு t எனும் மதிப்பிற்குத் தகுந்த சார்பு மதிப்பு ஆகும். கூட்டல், aயிலிருந்து b வரை tயின் எல்லாக் கூடுதல்களும் ஒவ்வொன்றும் பூச்சியத்தை நாடும் எல்லை நிலையில் எல்லாவற்றையும் சேர்த்து எடுக்கப்பட்டதாகும்.

எடுத்துக் காட்டாக, நேரம் 't'யின் சார்பாக அமைந்த மாறும் திசைவேகம் $\overline{V}$ உடைய ஒரு புள்ளி Pயின் இடப் பெயர்ச்சியை எடுத்துக் கொள்வோம். t_oவிலிருந்து t_1 என்ற நேரம் வரை உள்ள கால இடைவெளியைப் பல சிறு சிறு இடைவெளிகளாகப் பிரிப்பதாகக் கொள்வோம். இவ்விடை வெளிகளில் ஒன்றின் கால இடைவெளி δt எனில், அவ்விடை வெளியில் நேரும் இடப்பெயர்ச்சி δt $\overline{V}(t)$ ஆகும். { $\overline{V}(t)$ என்பது அவ்விடை வெளியில் $\overline{V}$-ன் மதிப்பு எனக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது}. இவ்வாறு பல்வேறு இடைவெளிகளிலும் நேரும் இடப்பெயர்ச்சிகளின் வெக்டர் கூட்டல் தான் t_oவிலிருந்து t_1 வரை எனும் இடைவெளியில் ஏற்படும் மொத்த இடப்பெயர்ச்சியாகும். ஒவ்வொரு இடைவெளி δtயும் பூச்சியத்தை நெருங்கும் நிலையில் எல்லை கண்டால்

$$Lt \sum_{t_o}^{t_1} \overline{V}\,(t)\,\delta t = \int_{t_o}^{t_1} \overline{V}\,(t)\,dt.$$

இதுபோன்றே $\overline{a}$ (t) என்ற முடுக்கம் கொண்ட ஒரு நகரும் புள்ளியின் திசை வேகத்தில் ஏற்படும் கூடுதல் dt எனும் மிகச் சிறு கால இடைவெளியில் $\delta t\ \overline{a}\ (t)$. எனவே t_oவிலிருந்து t_1 எனும் கால இடைவெளியில் திசைவேகத்தில் ஏற்படும் மொத்தக் கூடுதல்

$$Lt \sum_{t_0}^{t_1} \bar{a}\,(t)\,\delta t = \int_{t_0}^{t_1} \bar{a}\,(t)dt$$

இதுபோன்றே பொருண்மை மையம் காண

$\bar{r} = \dfrac{1}{M} \int \mu \bar{r} dv$ எனும் தொகையைப் பயன்படுத்துகிறோம். இதில் M என்பது மொத்தப் பொருண்மை (mass); μ என்பது அடர்த்தி (density); சிறு கன அளவு dv எனக் கொள்கிறோம். பொருளின் கன அளவு முழுவதிலும் தொகை காணப்படவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1: $\int_0^2 \{ti + (t^2 - 2t)\, j + (3t^2 + t^3)\, k\}\, dt$-ன் மதிப்பு காண்க.

$$\int_0^2 \{ti + (t^2-2t)\, j + (3t^2+t^3)\, k\}\, dt$$

$$= i \int_0^2 t\,dt + j \int_0^2 (t^2-2t)\, dt + k \int_0^2 (3t^2+t^3)\, dt$$

$$= i \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^2 + j \left[\frac{t^3}{3} - t^2 \right]_0^2 + k \left[t^3 + \frac{t^4}{4} \right]_0^2$$

$$= 2i - \frac{4}{3} j + 12k.$$

எடுத்துக்காட்டு 2: $\bar{r}\,(t) = 5t^2 i + tj - t^3 k$ எனில்

$\int_1^2 \bar{r} \times \dfrac{d^2 \bar{r}}{dt^2}\, dt$-ன் மதிப்பு என்ன?

$\int_1^2 \bar{r} \times \dfrac{d^2 \bar{r}}{dt^2}\, dt = \left[\bar{r} \times \dfrac{d\bar{r}}{dt} \right]_1^2$ வாய்பாட்டின்படி

$$\bar{r}\,(t) = 5t^2 i + tj - t^3 k$$

$$\therefore \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = 10ti + j - 3t^2 k$$

$$\therefore \quad \bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ 10t & 1 & -3t^2 \end{vmatrix}$$

$$= i(-3t^3+t^3) + j(-10t^4+15t^4) + k(5t^2-10t^2)$$

$$= -2t^3 i + 5t^4 j - 5t^2 k$$

$$\therefore \int_1^2 \bar{r} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\, dt = \Big[-2t^3 i + 5t^4 j - 5t^2 k \Big]_1^2$$

$$= -16i + 80j - 20k - (-2i + 5j - 5k)$$

$$= \mathbf{-14i + 75j - 15k}.$$

எடுத்துக்காட்டு 3 : $t = 2$ எனும் போது $\bar{r}(t) = 2i - j + 2k$ எனவும் $t = 3$ எனும் போது $\bar{r}(t) = 4i - 2j + 3k$ எனவுமிருந்தால்; $\int_2^3 \bar{r} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}\, dt = 10$ எனக் காண்பி.

வாய்பாட்டின்படி $\int_2^3 \bar{r} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}\, dt = \Big[\frac{1}{2}(\bar{r} \cdot \bar{r}) \Big]_2^3$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\bar{r}^2 \right]_2^3$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[(4i-2j+3k)^2 - (2i-j+2k)^2 \right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[16+4+9-(4+1+4) \right]$$

$$= \mathbf{10}.$$

எடுத்துக்காட்டு 4 : $\bar{r} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt} = 0$ எனில் $\bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{a}$, ஒரு மாறிலி வெக்டர் எனக் காட்டு.

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} \right) = \frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d\bar{r}}{dt} + \bar{r} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

$$= \bar{r} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

$= 0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\therefore \quad \bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{a}$ ஒரு மாறிலி வெக்டராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5: ஒரு துகள் நிலையான திசை வேகத்துடன் நகர்கிறது; ஆரம்ப நிலையில் அதன் நிலைவெக்டர் $\overline{r}_0$; அப்போது $t = 0$; பொதுவான ஏதோ ஒரு நேரம் tயில், அத்துகளின் நிலைவெக்டர் $\overline{r}$ஐக் காண்க. ஆய ஆதிக்கு வெகு அருகாமையில் அது இருக்கும்போது நேரம் $t = -\dfrac{\overline{r}_0 \cdot \overline{V}}{\overline{V} \cdot \overline{V}}$ எனக் காண்பி.

திசைவேகம் $\overline{V} = \dfrac{d\overline{r}}{dt}$;

$\therefore$ தொகை கண்டால்

$\overline{r} = \overline{V}t + \overline{c}$; $\overline{c}$ என்பது மாறிலி.

$t = 0$ எனும்போது $\overline{r} = \overline{r}_0$;

$\therefore \quad \overline{r}_0 = 0 + \overline{c}$

$\therefore \quad \overline{r} = \overline{V}t + \overline{r}_0 \qquad \dots (1)$

இது ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடாகும். துகள் ஆதிக்கு வெகு அருகில் இருக்கையில், அதன் திசைவேகம் $\overline{r}$க்குச் செங்குத்தாகும்.

$\therefore \quad \overline{r} \cdot \overline{V} = 0$

எனவே (1)ன் இருபுறமும் $\overline{V}$யுடன் புள்ளிப் பெருக்கல் செய்தால்,

$$\overline{r} \cdot \overline{V} = \overline{V} \cdot \overline{V}t + \overline{r}_0 \cdot \overline{V}$$

$$0 = \overline{V}^2 t + \overline{r}_0 \cdot \overline{V}$$

$$\therefore \quad t = -\frac{\overline{r}_0 \cdot \overline{V}}{\overline{V} \cdot \overline{V}}.$$

எடுத்துக்காட்டு 6: $\overline{r} \times d\overline{r} = 0$ எனில் $\hat{r}$ ஒரு மாறிலி எனக் காண்பி.

$$\overline{r} = xi + yj + zk$$

$$d\overline{r} = dxi + dyj + dzk$$

$\therefore \quad \overline{r} \times d\overline{r} = 0$ எனில் $\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$

என்று பொருள்.

i.e. $i\,(ydz - zdy) + j\,(zdx - xdz) + k\,(xdy - ydx) = 0.$

$\therefore \quad ydz - zdy = 0; \; zdx - xdz = 0; \; xdy - ydx = 0.$

$$\therefore \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

$\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$ என்பதன் இருபுறமும் தொகை கண்டால் $y = ax$; a என்பது ஏதோ ஒரு மாறிலி. அதேபோல் $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{z}$ என்பதன் இரு

புறமும் தொகை கண்டால், $z = bx$; b என்பது ஏதோ ஒரு மாறிலி. எனக்கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad \bar{r} = xi + yj + zk;$$
$$= xi + axj + bxk$$
$$= x(i + aj + bk)$$

$\therefore$ $\bar{r}$ன் திசையில் அமையும் ஓரலகு வெக்டர்

$$\hat{r} = \frac{i + aj + bk}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \text{ என்றாகும்.}$$

இதில் a, b என்பன மாறிலிகளாகையால், இவ்வெக்டர் ஒரு மாறிலி வெக்டராகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7: t எனும் நேரத்தில் ஒரு துகளின்மீதுள்ள முடுக்கம் $e^t i + e^{2t} j + k$ ஆனல் திசை வேகம் என்ன? $t = 0$ எனும் போது திசைவேகம் $\bar{V} = i + j$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\text{முடுக்கம்} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = e^t i + e^{2t} j + k;$$

இரு புறமும் tஐப் பொறுத்துத் தொகை கண்டால்,

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = e^t i + \frac{e^{2t} j}{2} + kt + \bar{c}; \; \bar{c} \text{ ஒரு மாறிலி}$$

$$t = 0 \text{ எனும்போது } \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V} = i + j$$

$$\therefore \quad i + j = i + \frac{j}{2} + \bar{c}$$

$$\therefore \quad \bar{c} = \frac{j}{2}$$

$$\therefore \quad \bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = e^t i + \frac{e^{2t} j}{2} + kt + \frac{j}{2}$$
$$= e^t i + (e^{2t} + 1)\frac{j}{2} + kt.$$

§ 8·03. கோட்டு வழித் தொகை: தொடுகோட்டு வழித் தொகை (Tangential line integral)

ஒரு வளை வரையையும், அவ்வளை வரையில் ஒரு நிலைப் புள்ளியிலிருந்து அளக்கப்படும் வில்லின் நீளம் 's'-ன் சார்பாக அமைந்த ஒரு வெக்டர் சார்பு $\bar{F}$ஐயும் எடுத்துக் கொள்வோம். A, B எனும் இரு புள்ளிகள் இவ்வளை கோட்டின்மேல் $s = a$, $s = b$ எனும் மதிப்புகளுக்குத் தகுந்த புள்ளிகள் என்க. வளைவரையில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வரையப்படும் ஓரலகுத் தொடுகோடு $\hat{t}$ என்க. அப்படியானல் $\bar{F} \cdot \hat{t}$ என்பது அப்புள்ளியில் தொடுகோட்டின் வழி $\bar{F}$ன் கூறு ஆகும். (a, b) எனும் இடைவெளியில், இக்கணியத்தின் (quantity) s ஒட்டிய வரை

யறுத்த தொகை, $\overline{F}$ன் வளைவரை வழியான கோட்டு வழித்தொகை (line integral) எனப்படும். இதனை

$\int_a^b \overline{F}\cdot\overline{t}\,ds = Lt\sum_a^b \overline{F}\cdot\hat{t}\,\delta s$ என எழுதலாம். A எனும் புள்ளியிலிருந்து B எனும் புள்ளி வரை காணப்படும் தொகை என்பதால்,

$\int_A^B \overline{F}\cdot d\overline{r} = Lt\sum_A^B \overline{F}\cdot\delta\overline{r}$ என்றும் எழுதலாம். இங்கு $\delta\overline{r}$ எனும் நுண்ணிய வெக்டர் $\delta s\hat{t}$ எனும் வெக்டருக்குச் சமம். அது தொடு கோட்டுக்கு இணையானது.

எடுத்துக்காட்டாக, $\overline{F}$ என்பது ஒரு துகளின்மேல் செயல்படும் விசையினைக் குறித்தால், அத்துகள் ஒரு வளைவரையின்மீது நகர்கையில் $\delta\overline{r}$ எனும் இடப் பெயர்ச்சிக்குத் தகுந்த, விசையினால் செய்யப்படும் வேலே அளவு $\overline{F}\cdot\delta\overline{r}$ ஆகும். எனவே வளைவரையிலுள்ள A, B எனும் இருபுள்ளிகளுக்கிடையில் காணப்படும் வரையறுக்கப்பட்ட தொகை அத்துகள் Aயிலிருந்து Bக்கு நகர்கையில் $\overline{F}$னல் செய்யப்படும் மொத்த வேலை அளவினைக் குறிக்கும். $\overline{F}$ என்பது P எனும் ஒரு புள்ளியிலுள்ள மின்சார (அல்லது காந்த) களச் செறிவைக் (Intensity) குறித்தால், கோட்டு வழித்தொகை ஓரலகு மின்விசைச் செறிவினல் (அல்லது துருவத்தினல்) Aயிலிருந்து Bக்கு நகர்கையில் செய்யப்படும் வேலை அளவைக் குறிக்கிறது. அதாவது அவ்விரு புள்ளிகளில் உள்ள மின்னூட்ட அளவின் வேறுபாட்டினைக் குறிக்கிறது (Potential).

நீர்மம் சார் இயக்க வியலில் (Hydrodynamics) $\overline{v}$ என்பது நீர்மத்தின் ஒரு புள்ளியின் திசை வேகத்தினைக் குறித்தால் நீர்மத்தில் வரையப்படும் மூடிய வளைவரையினைச் சுற்றிலும் எடுக்கப்படும் கோட்டு வழித்தொகை $\int\overline{v}\cdot d\overline{r} = \int\overline{v}\cdot t\delta s$ என்பது வளைவரையைச் சுற்றிலும் உள்ள 'சுழற்சி' (circulation) எனப்படும்.

$$\overline{F} = F_x i + F_y j + F_z k \text{ என்க.}$$

$$\overline{r} = xi + yj + zk$$

$$\therefore\ d\overline{r} = dxi + dyj + dzk$$

$$\therefore \int\overline{F}\cdot d\overline{r} = \int(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$= \int Fx\,dx + \int Fy\,dy + \int Fz\,dz$$

$\therefore \int_A^B \overline{F}\cdot d\overline{r} = -\int_B^A \overline{F}\cdot d\overline{r}$ ஆகும். ஏனெனில் Aயிலிருந்து

B நோக்கி நகர்கையில் மிகையாகக் (+) கருதப்படும் $d\overline{r}$, Bயிலிருந்து $\overline{A}$ நோக்கி நகர்கையில் $-d\overline{r}$ என ஆகும். எனவே Aயிலிருந்து Bக்குக் காணப்படும் தொகையும், Bயிலிருந்து Aக்குக் காணப்படும் தொகையும், அளவில் ஒன்ருயினும் குறியீட்டில் மாறுபடும்.

$\overline{F}$ எனும் சார்பு ஏதோ ஒரு திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பு Vயின் சரிவு எனக் கொள்வோம். அப்படியானல்

$$\int_A^B \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_A^B \nabla V \cdot d\overline{r} = \int_A^B dV \text{ ஆகும்.}$$

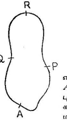
இத்தொகை $V_B - V_A$க்குச் சமம் ஆகும்.

V எனும் சார்பு ஒரு மதிப்புடைய சார்பாக அமைந்து, ஒரு மூடிய வளைவரையினைச் சுற்றித் தொகை கணக்கிடப்பட்டால், ஆரம்பப்புள்ளியும் முடிவுப்புள்ளியும் ஒன்றிவிடுவதால், $V_B - V_A = 0$ என்ருகிவிடும். அதாவது $\int \nabla V \cdot d\overline{r} = 0$. இவ்வாறு தொகை காண எடுத்துக் கொள்ளப்படும் வளைவரை மூடியதாயிருப்பின் இதனைத் தொகைக் குறியீட்டின் அடியில் ஒரு சிறு வட்டம் இடுவதன் மூலம் குறிக்கிருேம். அதாவது

$$\int_O \nabla V \cdot d\overline{r} = 0.$$

மறுதலையாக $\overline{F}$ எனும் ஒரு சார்பின் தொடுகோட்டு வழித்தொகை ஒவ்வொரு மூடிய வளை வரைக்கும் பூச்சியமாய் இருக்குமாளுல், $\overline{F}$ என்பது ஏதோ ஒரு திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பின் சரிவு ஆகும்.

$APRQ$ என்ற மூடிய வளை வரையை எடுத்துக் கொள்வோம். இதனைச் சுற்றிலும் $\overline{F}$ன் தொடுகோட்டு வழித்தொகை பூச்சியமாகையால்,



படம் 99.

$$\int_{\overline{APR}} \overline{F} \cdot d\overline{r} + \int_{\overline{RQA}} \overline{F} \cdot d\overline{r} = 0$$

$$\text{i.e. } \int_{\overline{APR}} \overline{F} \cdot d\overline{r} - \int_{\overline{AQR}} \overline{F} \cdot d\overline{r} = 0$$

$$\therefore \int_{\overline{APR}} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_{\overline{AQR}} \overline{F} \cdot d\overline{r}$$

இதுபோன்றே Aயையும் Rஐயும் இணைக்கும் எந்த ஒரு வளைவரைக்கும் இது பொருந்தும். A ஒரு நிலையான புள்ளி எனவும் R ஒரு மாறும் புள்ளி எனவும் கொள்க. Aயிலிருந்து R வரை காணப்படும் தொடு கோட்டு வழித் தொகை மதிப்பு, எடுத்துக் கொள்ளப்படும் பாதையைச் சார்ந்தில்லாததால் ஒரு திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பாகும். இதனை V எனலாம்.

$$\therefore \int_A^R \overline{F} \cdot \overline{dr} = V$$

எனவே Rல் ஏற்படும் சிறு இடப்பெயர்ச்சி $\overline{dr}$க்குத் தக Vல் ஏற்படும் கூடுதல் $dV = \overline{F} \cdot \overline{dr}$

ஆனல் $dV = \Delta V \cdot \overline{dr}$ எனக் கண்டோம்.

$\therefore$ $\overline{dr}$ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$$\overline{F} \cdot \overline{dr} = \nabla V \cdot \overline{dr}$$

$\therefore$ $\overline{F} = \nabla V$ ஆகும். அதாவது $\overline{F}$ ஏதோ ஒரு திசையிலிப் புள்ளிச்சார்பு V-ன் சரிவுக்குச் சமமாகும். பொதுவாக $\int_A^B \overline{F} \cdot \overline{dr}$ எனும் தொகை A-யிலிருந்து Bக்கு எப்பாதை வழி தொகை காணப்படுகிறது என்பதைச் சார்ந்து அமைகிறது. வேறு வேறுபாதைகளுக்கு வேறு வேறுதொகைகள் கிடைக்கும். ஆனல் $\overline{F}$ ஒரு திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பின் சரிவானல், எல்லாப் பாதைகளுக்கும் ஒரேதொகை மதிப்புத் தான் கிடைக்கும். இவ்வாறு $\overline{F}$ன் கோட்டுவழித் தொகை, தொகை காண எடுத்துக்கொள்ளும் பாதையைச் சார்ந்திராவிடில், அச்சார்பு ஒரு காப்புநிலைக் களத்தினை (conservative field) உருவாக்குகிறது என்று சொல்கிறோம். அப்போது $\overline{F}$ ஒரு திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பின் சரிவாகும்.

§ 8·04. $\overline{F}$ என்பது ஒரு காப்பு நிலைக்களம் எனில் அது சுழற்சியில்லாதது. i.e. $\nabla \times \overline{F} = 0$

இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும். அதாவது, $\nabla \times \overline{F} = 0$ எனில் $\overline{F}$ காப்புநிலைக் களத்தினைச் சார்ந்த வெக்டராகும்.

$\overline{F}$ என்பது காப்பு நிலைக்களமானல், ஒரு திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பின் சரிவாக எழுத இயலும் என்று கண்டோம். எனவே $\overline{F} = \nabla \varphi$ என்க. φ என்பது திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பு.

$\therefore$ சுழல் $\overline{F} = \nabla \times \overline{F} = \nabla \times (\nabla \varphi)$

$= 0$ வாய்ப்பாட்டின்படி

மறுதலையாக $\nabla \times \overline{F} = 0$ என்க.

$$\overline{F} = F_x i + F_y j + F_z k \text{ என்க.}$$

$$\text{i.e. } i\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z};\ \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x};\ \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}; \quad \ldots\ldots(1)$$

மேலும் (x_1, y_1, z_1) என்ற புள்ளியிலிருந்து (x, y, z) எனும் புள்ளிக்கு ஒரு துகளை நகர்த்துகையில் $\overline{F}$ என்ற விசைக்களத்தில் செய்யப்படும் மொத்த வேலை

$$= \int_C \{F_x(x, y, z)dx + F_y(x, y, z)dy + F_z(xyz)dz\}$$

C என்பது (x_1, y_1, z_1)ஐயும் (x, y, z)ஐயும் சேர்க்கும் பாதை ஆனல் (x_1, y_1, z_1)ல் இருந்து (x, y_1, z_1)க்கு அங்கிருந்து (x, y, z_1)க்கு, அங்கிருந்து (x, y, z)க்கு என மூன்று நேர்கோடுகளாகப் பிரித்துத் தொகை கண்டால் மொத்தம் செய்யப்படும் வேலை அளவு,

$$\varphi(x, y, z) = \int_{x_1}^{x} F_x(x, y_1, z_1)dx + \int_{y_1}^{y} F_y(x, y, z_1)dy + \int_{z_1}^{z} (F_z(xyz)dz$$

இதனின்றும் $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = F_z(x, y, z)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_y(xyz_1) + \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_z}{\partial y}(xyz)dz$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_x(x, y_1, z_1) + \int_{y_1}^{y} \frac{\partial F_y}{\partial x}(xyz_1)dy + \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_z}{\partial x}(xyz)dz$$

(1)ல் உள்ள சமன்பாடுகளைக்கொண்டு

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = F_z(x, y, z);$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_y(xyz_1) + \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_y(xyz)}{\partial z}dz.$$

$$= F_y(x, y, z_1) + \left[F_y(xyz)\right]_{z_1}^{z}$$

$$= F_y(x, y, z_1) + F_y(xyz) - F_y(xyz_1)$$

$$= F_y(x, y, z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_x(x, y_1, z_1) + \int_{y_1}^{y} \frac{\partial F_x(xyz_1)}{\partial x} dx + \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_x(xyz)}{\partial z} dz$$

$$= F_x(x, y_1, z_1) + [F_x(xyz_1)]_{y_1}^{y} + [F_x(xyz)]_{z_1}^{z}$$

$$= F_x(x, y_1, z_1) + F_x(xyz_1) - F_x(x, y_1, z_1) + F_x(xyz) - F_x(xyz_1)$$

$$= F_x(x, y, z)$$

$$\therefore \overline{F} = F_x i + F_y j + F_z k$$

$$= i\frac{\partial \varphi}{\partial x} + j\frac{\partial \varphi}{\partial y} + k\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$= \nabla \varphi$$

எனவே φ என்பதன் சரிவாக $\overline{F}$ அமைகிறது.

இவ்வாறு $\overline{F}$ என்பது ஒரு காப்புநிலைக் களம் என நிறுவத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நியதி $\nabla \times \overline{F} = 0$ என்பதாகும்.

§ 8·05. $\overline{F} = F_1 i + F_2 j + F_3 k$ எனில்,

$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ என்பது ஒரு முழுவகைக் கெழுவாக இருக்கத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நியதி $\nabla \times \overline{F} = 0$.

$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ என்பது ஒரு முழுவகைக் கெழு என்க. அதாவது $= d\varphi$ என்க. φ என்பது ஒரு திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பு.

$$\therefore \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

x, y, z மூன்றும் ஒன்றையொன்று சாராமாறிகள். (independent variables)

$$\therefore F_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x};\ F_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y};\ F_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\therefore \overline{F} = F_1 i + F_2 j + F_3 k;$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x} i + \frac{\partial \varphi}{\partial y} j + \frac{\partial \varphi}{\partial z} k;$$

$$= \nabla \varphi$$

$$\therefore \nabla \times \overline{F} = \nabla \times (\nabla \varphi) = 0.$$

எனவே இந்நியதி தேவையானது என்பது நிறுவப்படுகிறது. இனி இந்நியதி போதும் என நிறுவுவோம்.

அதாவது $\nabla \times \overline{F} = 0$ எனில் $F_1 dx + F_2 dy + F_5 dz$ ஒரு முழுவகைக்கெழு (perfect differential) என நிறுவலாம்.

$\nabla \times \overline{F} = 0$ எனில், $\overline{F}$ ஏதோ ஒரு திசையிலிச் சார்பு φ ன் சரிவாக இருக்கும் என்று முன்பே நிறுவியுள்ளோம்.

$$\therefore \quad \overline{F} = \nabla \varphi$$

$$\therefore \quad \overline{F} \cdot d\overline{r} = \nabla \varphi \cdot d\overline{r}$$

$$= \left(i\frac{\partial \varphi}{\partial x} + j\frac{\partial \varphi}{\partial y} + k\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \cdot \left(idx + jdy + kdz \right)$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

$$= d\varphi.$$

ஆனால் $\overline{F} \cdot d\overline{r} = (F_1 i + F_2 j + F_3 k) \cdot (idx + jdy + kdz)$

$$= F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

i.e. $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = d\varphi$

அதாவது $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ ஒரு வகைக் கெழு.

எடுத்துக்காட்டு 1 : $\overline{F} = xyi + (x^2 + y^2) j$ என்ற சார்புக்கு $y = x^2 - 4$ என்ற வளைவரையின் வழியாக (2, 0)விலிருந்து (4, 12) வரையான தொகை காண்க.

கோட்டு வழித்தொகை $\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$

$$= \int_C \{xyi + (x^2+y^2) j\} \cdot (idx + jdy)$$

$$= \int_C xy dx + \int_C (x^2+y^2) dy$$

$$= \int_C x(x^2-4)\, dx + \int_C (y^2+y+4)\, dy \qquad \{\because \; y = x^2 - 4\}$$

Cயில் x ஆனது 2ல் இருந்து 4 வரையும், y ஆனது 0-ல் இருந்து 12 வரையும் மாறுகின்றன.

$$\therefore \text{ கோட்டுவழித் தொகை} = \int_2^4 x(x^2-4)\, dx + \int_0^{12} (y^2+y+4) dy$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_2^4 + \left[\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 4y \right]_0^{12}$$

$$= 64 - 32 - 4 + 8 + 576 + 72 + 48$$

$$= 732$$

எடுத்துக்காட்டு 2: $\overline{F} = xyi + yzj + zxk$ என்ற சார்புக்கு $\overline{r} = ti + t^2j + t^3k$; என்ற வளைவரை C யின் வழி t க்கு -1ல் இருந்து 1 வரையான கோட்டுவழித் தொகை காண்க.

$$\overline{r} = ti + t^2j + t^3k$$

$$\therefore \frac{d\overline{r}}{dt} = i + 2tj + 3t^2k$$

மேலும் $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$

$$\therefore \int_C \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_C \overline{F} \cdot \frac{d\overline{r}}{dt}\, dt$$

$$= \int_C (xyi + yzj + zxk) \cdot (i + 2tj + 3t^2k)dt$$

$$= \int_C (xy + 2yzt + 3zxt^2)dt$$

$$= \int_{-1}^{1} t^3dt + \int_{-1}^{1} 2t^6dt + \int_{-1}^{1} 3t^6dt$$

$$= \left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{1} + \left[2\frac{t^7}{7}\right]_{-1}^{1} + \left[3\frac{t^7}{7}\right]_{-1}^{1}$$

$$= 5\left[\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\right] = \frac{10}{7}$$

எடுத்துக் காட்டு 3: $\overline{F} = c\,[-3a \sin^2\theta\, i + a\,(2\sin\theta - 3\sin^3\theta)\,j + b\sin 2\theta\, k]$ என்ற சார்புக்கு $\overline{r} = a\cos\theta\, i + a\sin\theta j + b\,\theta\, k$ என்ற வளைவரையின் வழியாக $\theta = \frac{\pi}{4}$ல் இருந்து $\frac{\pi}{2}$ வரையான கோட்டு வழித்தொகை காண்க.

$$\overline{r} = i\, a\cos\theta + j\, a\sin\theta + b\,\theta\, k$$

$$\therefore \frac{d\overline{r}}{d\theta} = -i\, a\sin\theta + j\, a\cos\theta + bk$$

கோட்டு வழித்தொகை $\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_C \overline{F} \cdot \frac{d\overline{r}}{d\theta}\, d\theta$

$$= \int_C c\,[-3a\sin^2\theta\cos\theta\, i + a\,(2\sin\theta - 3\sin^3\theta)\,j + b\sin 2\theta\, k] \cdot [-i\, a\sin\theta + j\, a\cos\theta + bk]\, d\theta$$

$$= \int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} c[3a^2\sin^3\theta\cos\theta + a^2(2\sin\theta - 3\sin^3\theta)\cos\theta + b^2\sin 2\theta]d\theta$$

$$= c\left\{3a^2\frac{(\sin\theta)^4}{4} + a^2\left(\sin^2\theta - \frac{3\sin^4\theta}{4}\right) - \frac{b^2\cos 2\theta}{2}\right\}_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= c\left\{3a^2\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{16}\right) + a^2\left(1-\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{16}\right) + \frac{b^2}{2}\right\}$$

$$= c\left\{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\right\} = \frac{c(a^2+b^2)}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 4: $\overline{F} = -2z^2xi + 3y^2zj + (y^3 - 2zx^2)k$ எனும் சார்பு ஏதாமொரு சார்பின் சரிவாக இருக்குமா என ஆராய்க.

$$\overline{F} = -2z^2xi + 3y^2zj + (y^3 - 2zx^2)k$$

இது f என ஏதோ ஒரு சார்பின் சரிவு என்க.

$$\therefore\ \nabla f = i\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$= \overline{F}$$

$$\therefore\ \frac{\partial f}{\partial x} = -2z^2x;\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2z;\ \frac{\partial f}{\partial z} = y^3 - 2zx^2$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 3y^2;\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 3y^2$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = 0.$$

அதேபோல் $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -4xz + 4zx = 0$

& $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0 - 0 = 0$

$\therefore\ \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$ என்பது ஒரு முழுவகைக் கெழு.

i.e. $-2z^2x\,dx + 3y^2z\,dy + (y^3 - 2zx^2)\,dz$

$= d\,[y^3z - z^2x^2]$

$\therefore\ y^3z - z^2x^2$ c-ன் சரிவாக $\overline{F}$ இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 : XOY தளத்தில் அமைந்த ஓரலகு ஆர முடைய வட்டப்பரிதி வழியே $\int_C \hat{t} \cdot d\bar{r}$ என்ற தொகை காண்க.

($\hat{t}$ என்பது ஓரலகுத் தொடுகோட்டு வெக்டர்.)

$$\int_C \hat{t} \cdot d\bar{r} = \int_C \hat{t} \cdot \frac{d\bar{r}}{ds}\, ds$$

$$= \int_C \hat{t} \cdot \hat{t}\, ds$$

$$= \int_C ds$$

$$= 2\pi \text{ வட்டச் சுற்றளவு.}$$

எடுத்துக்காட்டு 6 : ஏதாவது ஒரு வளை வரையில் Aயிலிருந்து Bக்குத் தொகை கண்டால், $\int_A^B \bar{V} \cdot (\hat{t} \cdot \nabla)\ \bar{V} ds = \frac{\bar{V}_B{}^2 - \bar{V}_A{}^2}{2}$ எனக் காண்பி. {$\hat{t}$ ஓரலகுத் தொடுகோட்டு வெக்டர்}.

ஓரலகுத் தொடுகோட்டு வெக்டர்

$$\hat{t} = i\frac{dx}{ds} + j\frac{dy}{ds} + k\frac{dz}{ds}$$

$$\therefore\ \hat{t} \cdot \nabla = \left(i\frac{dx}{ds} + j\frac{dy}{ds} + k\frac{dz}{ds}\right) \cdot \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\ \frac{dx}{ds} + \frac{\partial}{\partial y}\ \frac{dy}{ds} + \frac{\partial}{\partial z}\ \frac{dz}{ds} = \frac{d}{ds}$$

அதாவது $\hat{t} \cdot \nabla$ என்பது ஒரு செயலி (operator).

$$\therefore\ \int_A^B \hat{t} \cdot (\hat{t} \cdot \nabla)\ \bar{V} ds = \int_A^B \bar{V} \cdot \frac{d\bar{V}}{ds}\, ds$$

$$= \int_A^B \bar{V} \cdot d\bar{V}$$

$$= \frac{\bar{V}_B{}^2 - \bar{V}_A{}^2}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 7 : m எனும் பொருண்மை உடைய ஒரு துகளின் இயக்கச் சமன்பாடு $m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \varphi(r)\hat{r}$ என்பதாகும். இதில் $\hat{r}$ என்பது துகளின் நிலைவெக்டர் $\bar{r}$ன் திசையிலமையும் ஓரலகு வெக்டர்; $\varphi(r)$ என்பது ஆதியிலிருந்து துகளின் தொலைவாகிய rன் சார்பு ஆகும் எனில்

(i) $\bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{c}$ ஒரு மாறிலி வெக்டர் என நிறுவுக.

(ii) $\varphi(r) < 0$; $\varphi(r) > 0$ என இருக்கும்போது முடிவுகளை இயற்பியல் மூலம் விளக்குக.

(iii) முடிவு (i)ஐ வடிவகணித முறையில் விவரி.

(i) $m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \varphi(r)\hat{r}$.

இருபுறமும் $\bar{r}$ஐக் கொண்டு வெக்டர் பெருக்கல் செய்தால்,

$$m\,\bar{r} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \varphi(r)\,\bar{r} \times \hat{r}$$

$$= 0$$

$$\therefore \quad \bar{r} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = 0$$

இதனைத் தொகை கண்டால்

$$\bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{c} \quad \text{ஒரு மாறிலி}$$

(ii) $\varphi(r) < 0$; அதாவது $\varphi(r)$ன் குறி — ஆகும்.

$\therefore$ $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ ன் திசை $\bar{r}$க்கு எதிராகும். எனவே துகள் ஆதியை நோக்கி முடுக்கப்படுகிறது.

$\varphi(r) > 0$ எனில் $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ ன் திசை $\bar{r}$ன் திசையிலேயே அமையும். எனவே துகளின்மீது விலக்கு விசைச் செயல்படுகிறது.

(iii) முதல் பிரிவில் $\bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{c}$ ஒரு மாறிலி என நிறுவப்பட்டது. t எனும் நேரத்தில் துகளின் நிலைவெக்டர் $\bar{r}$ எனவும், $t + \Delta t$ எனும் நேரத்தில் $\bar{r} + \Delta\bar{r}$ எனவும் கொள்க.

முதலில் A எனும் நிலையிலிருந்த துகள் Δt எனும் இடைவேளையில் $\Delta \bar{r}$ எனும் அளவுக்கு இடப் பெயர்ச்சிபெற்று B என்ற நிலையை அடையும். அப்படியானல் $\frac{1}{2}\bar{r} \times \Delta \bar{r}$ என்பது நுண்ணிய முக் கோணப் பரப்பு OABயைக் குறிக்கும். இவ்வெக்டர் பரப்பின் மீது நகர எடுத்துக்கொண்ட நேரம் Δt ஆகும். எனவே ஓரலகு நேரத்தில்

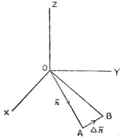
நகரும் பரப்பு $= \frac{1}{2}\bar{r} \times \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$

அதாவது பரப்பினைக் கடக்கும் வீதம்

$$= \frac{1}{2} \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \bar{r} \times \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

$$= \frac{1}{2} \bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt}$$

$$= \frac{1}{2} \bar{r} \times \bar{V}$$



படம் 100.

$\bar{V}$ என்பது அக்கணத்தில் அத்துகளின் திசைவேகமாகும். இம்மதிப்பு மாறிலியாகக் கிடைக்கும் என (1)வது முடிவிலிருந்து தெரிகிறது. அதாவது துகளின் பரப்புத் திசைவேகம் ஒரு மாறிலியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8: $\bar{F} = 3xyi - 5zj + 10xk$ எனும் விசையால் $x = t^2+1$, $y = 2t^2$, $z = t^3$ எனும் வளைவரை மீது $t=1$ல், இருந்து $t=2$ வரை ஒரு துகளை நகர்த்துகையில் செய்யப்படும் வேலை அளவு என்ன?

மொத்த வேலை அளவு $= \int_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$

$$= \int_C (3xyi - 5zj + 10xk) \cdot (idx + jdy + kdz)$$

$$= \int_C (3xydx - 5zdy + 10xdz)$$

$$= \int_1^2 \{3(t^2+1)\, 2t^2 2tdt - 5t^3 4tdt + 10(t^2+1)\, 3t^2dt\}$$

$$= \int_1^2 (12t^5 + 12t^3 - 20t^4 + 30t^4 + 30t^2)\, dt$$

$$= \int_1^2 (12t^5 + 10t^4 + 12t^3 + 30t^2)\, dt$$

$$= (2t^6+2t^5+3t^4+10t^3)\Big|_1^2$$

$$= 128+64+48+80-2-2-3-10$$

$$= 320-17 = 303 \text{ அலகுகள்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 9 : $\overline{F}$ எனும் காப்பு நிலை விசைக் களம் ஒன்றில் (conservative force field) Aயிலிருந்து B எனும் புள்ளிக்கு மாருப் பொருண்மை m உடைய ஒரு துகள் $\overline{F} = -\nabla\varphi$ எனுமாறு நகர்கிறது. V_A, V_B என்பன, A, Bயில் துகளின் திசைவேகங்கள் எனில் $\varphi_A - \varphi_B = \frac{1}{2}m\,(V_B{}^2 - V_A{}^2)$ என நிறுவுக.

விசை வெக்டர் = (பொருண்மை) (முடுக்கத்தைக் குறிக்கும் வெக்டர்)

$$\text{i.e. } \overline{F} = m\overline{a} = m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}$$

$$\therefore\ \overline{F}\cdot\frac{d\overline{r}}{dt} = m\frac{d\overline{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\overline{r}}{dt^2}$$

$$= \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left|\frac{d\overline{r}}{dt}\right|^2$$

$$= \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\overline{V})^2$$

$$= \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(|\overline{V}|)^2$$

∴ இருபுறமும் t ஒட்டிய தொகை கண்டால்,

$$\int_A^B \overline{F}\cdot\frac{d\overline{r}}{dt}\,dt = \int_A^B \overline{F}\cdot d\overline{r} = \left[\frac{m}{2}|\overline{V}|^2\right]_A^B$$

$$= \frac{m}{2}\left[V^2{}_B - V^2{}_A\right]$$

ஆனால் $\overline{F} = -\nabla\varphi$

$$\therefore\ \overline{F}\cdot d\overline{r} = -\nabla\varphi\cdot d\overline{r}$$

$$= -d\varphi$$

$$\therefore\ \int_A^B \overline{F}\cdot dr = -\int_A^B d\varphi$$

$$= [-\varphi]_A^B$$

$$= \varphi_A - \varphi_B$$

$$\therefore\ \varphi_A - \varphi_B = \tfrac{1}{2}m\left[V^2{}_B - V^2{}_A\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 10 : $\overline{F} = (5xy-6x^2)\,i + (2y-4x)\,j$ எனில் xy தளத்தில் $y = x^3$ எனும் வளைவரை வழியாக, (1, 1) எனும் புள்ளியிலிருந்து (2, 8) எனும் புள்ளி வரையான கோட்டு வழித் தொகை காண்க.

$$\text{கோட்டு வழித் தொகை} = \int_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$$

$$\overline{r} = xi + yj \qquad \{\because\ XOY \text{ தளத்தில் } z = 0\}$$

$$\therefore\ d\overline{r} = dxi + dyj$$

வளைவரையில் $y = x^3$; $\qquad \therefore\ dy = 3x^2dx$

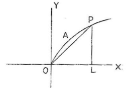
$$\therefore\ d\overline{r} = dxi + 3x^2dxj$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{F}\cdot d\overline{r} &= \{(5xy-6x^2)\,i + (2y-4x)\,j\}\,.\,(i+3x^2j)\,dx\\ &= (5xy-6x^2)\,dx + (2y-4x)\,3x^2\,dx\\ &= (5x\,.\,x^3-6x^2)\,dx + (2x^3-4x)\,3x^2\,dx\ \{\because\ y=x^3\}\\ &= 5x^4dx - 6x^2dx + 6x^5dx - 12x^3dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int_1^2 \overline{F}\cdot d\overline{r} &= \int_1^2 5x^4dx - \int_1^2 6x^2dn + \int_1^2 6x^5dx - \int_1^2 12x^3dx\\ &= \left[x^5-2x^3+x^6-3x^4\right]_1^2\\ &= 35.\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 11 : $\overline{F} = y^2i + xyj$ என்ற சார்புக்கு $\int \overline{F}\cdot d\overline{r}$ என்ற கோட்டு வழித்தொகையை (0, 0) விலிருந்து (4, 2) வரை மூன்று வழிகளில் கணக்கிடுக.

முதலில் $y^2 = x$ என்ற பரவளையத்தின் வழியாகத் தொகை காண்போம்.



படம் 101.

வளைவரையில் $y^2 = x$

$$2ydy = dx$$

$$\begin{aligned}\therefore\ d\overline{r} &= dxi + dyj\\ &= 2ydyi + dyj\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{F}\cdot d\overline{r} &= (y^2i + xyj)\,.\,(2ydyi + dyj)\\ &= (y^2i + y^3j)\ .\,(2ydyi + dyj)\ \{\because\ x = y^2\}\\ &= 2y^3dy + y^3dy\\ &= 3y^3dy\end{aligned}$$

$$\therefore \int_{OAP} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_0^2 3y^3 dy = \tfrac{3}{4}\left[y^4\right]_0^2 = 12$$

இரண்டாவதாக OP என்ற நேர்கோட்டின் வழியாகத் தொகை காண்போம்.

OPயின் சமன்பாடு $2y = x$

$$\therefore 2dy = dx$$

$$\therefore d\overline{r} = dxi + dyj$$

$$= 2dyi + dyj$$

$$\therefore \overline{F} \cdot d\overline{r} = (y^2 i + xyj) \cdot (2dyi + dyj)$$

$$= (y^2 i + 2y^2 j) \cdot (2dyi + dyj)$$

$$= 2y^2 dy + 2y^2 dy)$$

$$= 4y^2 dy$$

$$\therefore \int_{OP} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_0^2 4y^2 dy = 4\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \tfrac{32}{3}.$$

மூன்றாவதாக Oவிலிருந்து L வரையிலும், பின்னர் Lல் இருந்து P வரையிலுமாக இரு நேர்கோடுகள் வழித்தொகை காண்போம். முதற் கோட்டின் சமன்பாடு $y = 0$.

$$\therefore dy = 0$$

$$\therefore d\overline{r} = dxi \quad \text{மேலும்} \ \overline{F} = 0i + 0j = 0$$

$$\therefore \int_{OL} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int 0 \cdot d\overline{r} = 0 \qquad \{\because x \text{ அச்சில் } y = 0;\ \therefore \overline{F} = 0\}$$

LPயின் சமன்பாடு $x = 4$

$$\therefore dx = 0$$

$$\therefore d\overline{r} = jdy$$

$$\text{மேலும்} \ \overline{F} = y^2 i + xyj$$

$$= y^2 i + 4yj \qquad \{\because x = 4\}$$

$$\therefore \int_{LP} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_0^2 (y^2 i + 4yj) \cdot jdy$$

$$= \int_0^2 4ydy = \left[2y^2\right]_0^2$$

$$= 8.$$

இவ்வாறு மூன்று வேறுபட்ட பாதைகளுக்குத் தகுந்தவாறு மூன்று வேறுபட்ட மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 12: $\overline{F} = x^2 i + y^2 j$ என்ற சார்புக்கு $\int \overline{F} \cdot d\overline{r}$ எனும் தொகை மதிப்பை (0, 0) விலிருந்து (1, 1) வரை கண்டு அம் மதிப்புத் தொகை காண எடுத்துக் கொள்ளப்படும் பாதையைச் சார்ந்து அமையவில்லை என்பதை நிறுவுக.

முதலாவதாக $y = x^2$ எனும் பரவளையத்தின் வழியே தொகை காண்போம்.

வளைவரையில் $y = x^2$

$\therefore\ dy = 2x dx$

$\therefore\ d\overline{r} = dx i + dy j$

$= dx i + 2x dx j$

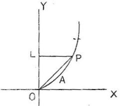
$\therefore\ \overline{F} \cdot d\overline{r} = (x^2 i + y^2 j) \cdot (dx i + 2x dx j)$

$= x^2 dx + y^2 2x dx$

$= x^2 dx + 2x^5 dx \quad \{\because\ y = x^2\}$

$$\therefore \int_{OAP} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_0^1 (x^2 + 2x^5) dx$$

$$= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}.$$



படம் 102.

இரண்டாவதாக OP என்ற நேர்கோட்டின் வழியாகத் தொகை காண்போம்.

OPயின் சமன்பாடு $y = x$

$$\therefore\ dy = dx$$

$$\therefore\ d\overline{r} = i dx + j dy$$

$$= i dx + j dx$$

$$\therefore\ \overline{F} \cdot d\overline{r} = (x^2 i + y^2 j) \cdot (i dx + j dx)$$

$$= (x^2 i + x^2 j) \cdot (i dx + j dx) \quad (\because\ y = x)$$

$$= x^2 dx + x^2 dx$$

$$= 2x^2 dx$$

$$\therefore \int_{OP} F \cdot d\overline{r} = \int_0^1 2x^2 dx = \tfrac{2}{3}.$$

மூன்றாவதாக, OL வழியாகவும், பிறகு LP வழியாகவும் தொகை காண்போம். (Pயிலிருந்து OYக்குச் செங்குத்தாக PL வரையப் பட்டுள்ளது.)

OLன் சமன்பாடு $x = 0$

$$\therefore \quad dx = 0$$

$$\therefore \quad d\bar{r} = j\,dy$$

மேலும் $\bar{F} = x^2 i + y^2 j$

$$= y^2 j \quad (\because x = 0)$$

$$\therefore \int_{OL} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_0^1 y^2 j \cdot j\,dy$$

$$= \int_0^1 y^2 dy = \tfrac{1}{3}$$

LPயின் சமன்பாடு $y = 1 \quad \therefore dy = 0$

$$\therefore \quad d\bar{r} = i\,dx$$

$$\bar{F} = x^2 i + y^2 j$$

$$= x^2 i + j \qquad \{\because y = 1\}$$

$$\therefore \int_{LP} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_0^1 (x^2 i + j) \cdot i\,dx$$

$$= \int_0^1 x^2 dx = \tfrac{1}{3}$$

$\therefore$ OL, LP வழி காணப்பட்ட கோட்டு வழித் தொகைகளின் மொத்தம் $= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

$\therefore$ கோட்டு வழித்தொகை பாதையைப் பொறுத்து மாறாமல், ஒரே மதிப்பாக அமைகிறது.

இம்மாதிரிச் சார்பு $\bar{F}$ ஏதேனும் ஒரு திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பின் சரிவு எனக் காட்டலாம். φ எனும் திசையிலிச் சார்புக்கு

$\nabla \varphi = \bar{F}$ எனக் கொள்வோம். அப்படியானால்

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial x} + j\frac{\partial \varphi}{\partial y} + k\frac{\partial \varphi}{\partial z} = x^2 i + y^2 j$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = x^2; \ \frac{\partial \phi}{\partial y} = y^2; \ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

$\therefore \ \varphi = \dfrac{x^3}{3} + x$ அல்லாத மாறிலி.

$\varphi = \dfrac{y^3}{3} + y$ அல்லாத மாறிலி.

$\varphi = z$ அல்லாத ஒரு மாறிலி எனும் மூன்று கட்டுப்பாடுகளுக் கிணங்க φ அமையவேண்டும். எனவே $\varphi = \frac{x^3 + y^3}{3} + c$ என்று எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

§ 8·06. பரப்புச் செங்கோட்டுவழித் தொகை (அல்லது) பரப்பு வழித்தொகை (normal surface integral)

ஒரு வளைதளத்தினையும் (curved surface) அதன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் முடிவுள்ள (finite) வரையறுத்த (definite) மதிப்பினையுடைய ஒரு வெக்டர் சார்பு $\overline{F}$ஐயும் எடுத்துக் கொள்வோம். தளத்தில் P எனும் புள்ளியில் வரையப்படும் செங்கோட்டிற்கு இணையான ஓரலகு வெக்டர் $\hat{n}$ என்க. இதன் திசை வளைதளம் மூடியதாயிருப்பின் வெளி நோக்கியும், மூடாததாயிருப்பின் தளத்திற்கு ஒரு புறமாகவே எப்போதும் அமைவதாக இருக்கும். அப்படியானால் $\overline{F} \cdot \hat{n}$ என்பது செங்கோட்டின் வழியாக $\overline{F}$-ன் கூறாகும். வளைதளப் பரப்பினை மிக நுண்ணிய மூலகப் பரப்புகளாகப் பிரிப்பதாயும் Pயினைச் சுற்றியமையும் நுண்ணிய பரப்பு δA எனவும் கொள்வோம்.

$S = \Sigma \overline{F} \cdot \hat{n}\, \delta A$ எனும் கூட்டல், தளத்தில் எல்லா நுண்ணிய பரப்புகளுக்கும் எடுக்கப்பட்டால், நுண்பரப்புகளின் எண்ணிக்கை கந்தழியையும் (infinity), δA பூச்சியத்தையும் நாடுகையில் S-ன் மதிப்பு ஒரு வரையறுக்கப்பட்ட எல்லையினை நெருங்கும். இவ்வெல்லை மதிப்பினைத்தான் கொடுக்கப்பட்ட வளைதளத்தின்மீது $\overline{F}$-ன் பரப்பு வழித்தொகை அல்லது பரப்புச் செங்கோட்டு வழித் தொகை என்கிறோம். இதனை $\int \overline{F} \cdot \hat{n}\, dA = Lt\, \Sigma \overline{F} \cdot \hat{n}\, \delta A$ என எழுதுகிறோம். உண்மையில் இது $\overline{F} \cdot \hat{n}$ என்ற திசையிலிச் சார்பின் பரப்பு வழித் தொகையாகும். முன்பே நாம் பரப்புகளை வெக்டரினால் குறிக்கும் முறைபற்றிக் குறிப்பிட்டுள்ளபடி, Pயில் உள்ள δA என்ற பரப்பினை Pயில் வளைதளத்திற்கு வரையப்படும் செங்கோட்டின் திசையில் அமைந்த $\delta A \cdot \hat{n}$ என்ற வெக்டர் குறிக்கும். இதனைச் சுருக்கமாய் $\delta \overline{A}$ என்றும் குறிப்பிடுவதுண்டு. எனவே மேற்சொன்ன தொகையை $\int \overline{F} \cdot d\overline{A} = Lt\, \Sigma \overline{F} \cdot \delta \overline{A}$ என்றும் எழுதலாம். இங்குத் தொகையைக் காணப் பயன்படுத்தும் மாறி பரப்பளவாக எடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே ஒற்றைத் தொகைக் குறியீடு இடப்பெற்றுள்ளது. சில நூல்களில் பரப்புத் தொகையீடுகளில் இரட்டைத் தொகைக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்துவர். அதாவது மேற்சொன்ன தொகையை

$\iint_S \overline{F} \cdot d\overline{A}$ எனக் குறிப்பிடுவர். அடியில் எழுதப்பட்டுள்ள S என்பது அத்தளம் முழுவதிலும் தொகை காணப்படல் வேண்டும்

என்பதைக் குறிக்கும். இந்நூலில் நாம் இரண்டையும் கையாண்டுள்ளோம்.

§ 8·07. பரப்பு வழித் தொகை காணுதலின் இயற்பியல் விளக்கம்

ஓர் அரை நீர்மத்தில் ஒரு புள்ளியின் திசைவேகம் $\overline{F}$ என்ற வெக்டரால் குறிக்கப்படுகிறது எனக் கொள்வோம். S எனும் வளைதளப்பரப்பு அந்நீர்மத்தில் வரையப்படுகிறது என்க. ஏதோ ஒரு புள்ளியில் திசைவேகம் $\overline{F}$. அப்புள்ளியைச் சுற்றியுள்ள நுண்ணிய பரப்பு δA. அப்புள்ளியில் வளைதளத்திற்குச் செங்கோட்டின் திசைக்கு இணையான ஓரலகு வெக்டர் $\hat{n}$ எனில், $\overline{F}\cdot\hat{n}\,\delta A$ என்பது அந்த நுண்ணிய பரப்பிற்குச் செங்குத்துத் திசையில் ஓரலகு நேரத்தில் வெளியேறும் அரை நீர்ம அளவினைக் குறிக்கும். தொடு கோட்டு வழியான கூறு அந்நுண்ணிய பரப்பின் வழியே வெளியேறும் அரை நீர்ம அளவைப் பாதிப்பதில்லை. எனவே அந்நுண்ணிய பரப்பின் வழி வெளியேறும் அரை நீர்மம் முழுதும் அதற்குச் செங்குத்தான செங்கோட்டின் திசையில் வெளியேறுவது தான். எனவே $\overline{F}\cdot\hat{n}\,\delta A$ எனும் மதிப்பினை வளைதளப்பரப்பு முழுவதற்கும் கூட்டித் தொகை கண்டால்,

$\int \overline{F}\cdot\hat{n}\,dA$ = வளைதளப் பரப்பு முழுவதின் வழியே ஓரலகு நேரத்தில் வெளியேறும் அரை நீர்ம மொத்த அளவினைக் குறிக்கும். பொதுவாக $\int \overline{F}\cdot\overline{dA}$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட வளைதளப்பரப்பு முழுவதின் வழியே வெளிப்பாயும் $\overline{F}$ன் பாய்வினைக் (flux) குறிக்கும். $\overline{F}$ என்பது மின்விசை, காந்தவிசை புவிஈர்ப்பு விசை, வெப்பப் பாய்வு முதலிய இயற்பியல் வெக்டர்களில் ஏதேனும் ஒன்றாக இருக்கலாம்.

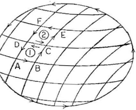
§ 8·08. ஸ்டோக்கின் தேற்றம் (Stoke's Theorem)

ஒரு வெக்டர் சார்பின் சுழலின் பரப்பு வழித் தொகையினை அப்பரப்பின் வரம்பான வளைவரை (boundary curve)யின் தொடு கோட்டு வழித் தொகையுடன் இணைப்பது இத்தேற்றத்தின் குறிக்கோளாகும்.

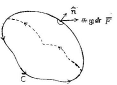
தேற்றம்: S எனும் திறந்த பரப்பின் மீது, ஒரு சீரான, (uniform) முடிவுள்ள (finite), தொடர்ச்சியான வெக்டர் சார்பு $\overline{F}$ன் சுழலின் செங்கோட்டு வழிக் கூறின் பரப்பு வழித்தொகை, Sன் வரம்பான மூடிய வரை Cயின் தொடுகோட்டு வழியான $\overline{F}$ன் தொகைக்குச் சமம் ஆகும்.

அதாவது S என்பது இருபுறங்கள் கொண்ட ஒரு திறந்த பரப்பு; C அப்பரப்பின் வரம்பாக அமைந்த, தன்னைத் தானே வெட்டிக்

கொள்ளாத ஓர் எளிய மூடிய வளை வரை (Simple closed curve). $\overline{F}$ன் வகைக் கெழுக்கள் தொடர்ச்சியானவை. இந்த நியதிகளுடன் $\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_S \nabla \times \overline{F} \cdot d\overline{A}$ என்பது இத்தேற்றத்தின் பொருள். இதில் Cயினை மிகைத் திசையில் சுற்றிவரவேண்டும். வளைதளப் பரப்பிற்கு எத்திசையில் வரையப்படும் செங்கோடு மிகைத் திசையில் உள்ளது எனக் கொள்ளப்படுகிறதோ, அச்செங்கோடு, வளைவரையினைச் சுற்றும்போது இடக்கைப் பக்கம் அமையவேண்டும். அப்போது தான் Cயினை மிகைத் திசையில் சுற்றுவதாய் எடுத்துக் கொள்ளப்படும்.



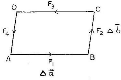
படம் 103.



படம் 104.

வளைதரப் பரப்பின்மீது படத்தில் காட்டியதுபோல், வலைபின்னியது போன்று கோடுகள் வரைந்து Cயில் உள்ள புள்ளிகளை இணைக்க வேண்டும். இவ்வாறு சிறுசிறு இணைகரக் கட்டங்கள் எண்ணிறந்த அளவுக்கு உருவாக்கும்படி நிறைய எண்ணிக்கையில் கோடுகள் வரையப்படவேண்டும். $\overline{F}$ன் கோட்டுவழித் தொகையை ஒவ்வொரு சிறு கட்டத்தின் பக்கங்களின் வழியெல்லாம் காணவேண்டும். எடுத்துக் காட்டாக சிறு கட்டங்கள் (1), (2) என்பவற்றின் பக்கங்களின் வழியே கோட்டுவழித் தொகை எடுத்துக் கூட்டும்போது $ABCD$யில் CD வழியேயும் $EFDC$யில் மீண்டும் DC வழியேயும் தொகை கண்டு கூட்ட வேண்டிய நிலை ஏற்படுகிறது. எனவே இவ்விரண்டின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகிறது. இதுபோன்றே மற்றச் சிறுகட்டங்களின் பக்கங்களின் வழி காணப்படும் தொகைகள் ஒருதடவை ஒரு திசையிலும், அண்டைக் கட்டத்தின் பக்கமாகக்கொண்டு தொகை காணுகையில் எதிர்திசையிலுமாகக் காணப்பட்டுக் கூட்டப்படுவதால் பூச்சியமாகின்றன. ஆனால் வளைதளத்தின் வரம்பாக அமைந்த வளைவரையை ஒட்டிய சிறு கட்டங்களில் தொகை காணும்போது வளைவரையின் பகுதியான சிறுசிறு

துண்டுகளில் காணப்படும் தொகைகள் மட்டிலும் ஒரேதடவை ஒரே திசையில் காணப்பட்டுக் கூட்டப்படுகின்றன. எனவே மொத்த வளைதளப் பரப்பிலும் அமைந்த எல்லாக் கட்டங்களின் பக்கங்களின் வழியாகவும் காணப்படும் கோட்டுவழித் தொகைகளின் கூட்டல் அந்த வரம்பான வளைவரையின் வழியாகக் காணப்படும் கோட்டுவழித் தொகைக்குச் சமம்.



படம் 105.

படத்தில் ஒரு சிறு கட்டம் பெரிதாக்கிக் காட்டப்பட்டுள்ளது. புள்ளிக்குப் புள்ளி $\overline{F}$ன் மதிப்பு மாறுவதால் $\overline{F}$ன் சராசரி மதிப்புகள் AB, BC, CD, DAயில் முறையே F_1, F_2, F_3, F_4 என இருக்கட்டும். AC, BC என்ற பக்கங்கள் முறையே $\Delta\overline{a}$, $\Delta\overline{b}$ என்க.

$$\therefore \int_{ABCD} \overline{F}\cdot d\overline{r} = F_1\cdot\Delta\overline{a}+\overline{F}_2\cdot\Delta\overline{b}+\overline{F}_3\cdot(-\Delta\overline{a})+\overline{F}_4\cdot(-\Delta\overline{b})$$

$$= \Delta\overline{a}\cdot(\overline{F}_1-\overline{F}_3)+\Delta\overline{b}\cdot(\overline{F}_2-\overline{F}_4)$$

$$= \Delta\overline{b}\cdot(\overline{F}_2-\overline{F}_4)-\Delta\overline{a}\cdot(\overline{F}_3-\overline{F}_1)$$

$d\overline{r}$ எனும் சிறு இடப்பெயர்ச்சிக்குத் தகுந்த $\overline{F}$ல் ஏற்படும் மாற்றம் $\Delta\overline{F}$ எனில்

$$\Delta\overline{F} = \frac{\partial\overline{F}}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\overline{F}}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial\overline{F}}{\partial z}\Delta z$$

$$= \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}+\Delta z\frac{\partial}{\partial z}\right)\overline{F}$$

$$= (\Delta\overline{r}\cdot\nabla)\overline{F}$$

(ஏனெனில் $\nabla\overline{r} = \Delta xi+\Delta yj+\Delta zk$)

எனவே $\overline{F}$ல் ஏற்படும் சிறுமாற்றம் $\Delta\overline{F}=(\Delta\overline{r}\cdot\nabla)\overline{F}$.

$\therefore$ $\overline{F}_3-\overline{F}_1 = AD$ வழியே $\Delta\overline{b}$ எனும் சிறு இடப்பெயர்ச்சிக்குத் தகுந்த, $\overline{F}$ல் ஏற்படும் மாற்றம்

$$= (\Delta\overline{b}\cdot\nabla)\overline{F}$$

இதேபோல் $\overline{F}_2-\overline{F}_4 = AB$ வழியே $\Delta\overline{a}$ எனும் சிறு இடப்பெயர்ச்சிக்குத் தகுந்த $\overline{F}$ல் ஏற்படும் மாற்றம்

$$= (\nabla\overline{a}\cdot\nabla)\overline{F}$$

$$\therefore \int_{ABCD} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \Delta \overline{b} \cdot (\Delta \overline{a} \cdot \nabla) \overline{F} - \Delta \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \nabla) \overline{F}$$

$$= [\Delta \overline{b}' \Delta \overline{a} \cdot \nabla) - \Delta \overline{a} (\Delta \overline{b} \cdot \nabla)] \cdot \overline{F}$$

$$= \{(\Delta \overline{a} \times \Delta \overline{b}) \times \nabla\} \cdot \overline{F}$$

$$= (\Delta \overline{a} \times \Delta \overline{b}) \cdot \nabla \times \overline{F}$$ {புள்ளிப் பெருக்கலையும் வெக்டர் பெருக்கலையும் இடமாற்றிக் கொள்ளலாம் என்ற விதிப்படி}

ஆனால் $\Delta \overline{a} \times \Delta \overline{b}$ என்பது இணைகரம் $ABCD$யின் பரப்பு வெக்டர் ஆகும். எனவே $\Delta \overline{A}$ எனக் குறிக்கலாம்.

$$\therefore \int_{ABCD} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \Delta \overline{A} \cdot \nabla \times \overline{F}$$

$$= \nabla \times \overline{F} \cdot \Delta \overline{A}$$

இதுபோன்றே எல்லாச் சிறு கட்டங்களுக்கும் விடை வரும் ஆகையால் அவற்றைக் கூட்டினால்,

$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r} = \int_S \nabla \times \overline{F} \cdot d\overline{A}$ இதுதான் ஸ்டோக் தோற்றம் ஆகும்.

முக்கியக் குறிப்பு: ஒரு வளை தளத்தின் வரம்பான வளைவரை ஒரு சமதளத்திலிருந்தால் $\int_S \nabla \times \overline{F} \cdot d\overline{A} = \int_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$

அந்தச் சமதளத்தில் அவ்வளைவரை Cயினால் அடைக்கப்பெறும் சமதளப் பரப்பு வழித்தொகையும் $\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$ என்றே ஆகும். எனவே $\int_S \nabla \times \overline{F} \cdot d\overline{A}$ என்ற தொகை ஒரு வளைதளப்பரப்பின்மீது காணப்பட வேண்டுமாயின், அவ்வளைதளப் பரப்பின் வரம்பு வளைவரையினால் ஒரு சமதளத்தில் அடைக்கப்பெறும் பரப்பின்மீது பரப்பு வழித்தொகை கண்டால் போதும்.

§ 8·09. XOY தளத்தில் S எனும் வளைதளப் பரப்பின் வீழ்ச்சி R எனில்

$$\iint_S \overline{F} \cdot \hat{n} dA = \iint_R \frac{\overline{F} \cdot \hat{n}}{|\hat{n} \cdot k|} dx dy$$

பரப்பு வழித்தொகையின் வரையறைப்படி

$$\iint_S \overline{F} \cdot \hat{n} dA = Lt \sum \overline{F} \cdot \hat{n} \delta A$$

ஆனால் δAயின் வீழ்ச்சி XOY தளத்தில் $|\hat{n}\delta A \cdot k|$ இது $\Delta x\ \Delta y$க்குச் சமம். ஏனெனில் XOY தளத்தில் துண்ணிய மூலகப் பரப்பு $\Delta x\ \Delta y$ ஆகும்.

$$\therefore\ |\delta A\hat{n} \cdot k| = \Delta x\ \Delta y$$

$$\therefore\ \delta A = \frac{\Delta x\ \Delta y}{|\hat{n} \cdot k|}$$

$$\therefore\ \iint_S \overline{F} \cdot \hat{n} dA = Lt\ \Sigma\ \overline{F} \cdot \hat{n}\delta A$$

$$= Lt\ \Sigma\ \overline{F} \cdot \hat{n}\ \frac{\Delta x\ \Delta y}{|\hat{n} \cdot k|}$$

$$= \iint_R \frac{\overline{F} \cdot \hat{n}\ dx dy}{|\hat{n} \cdot k|}$$

குறிப்பு : பரப்பு வழித்தொகைகள் காண ஆயதளங்கள் ஏதாயினு மொன்றில் அவ்வளைதளப் பரப்பின் வீழ்ச்சிப் பரப்பு முழுவதிலும் பரப்பு வழித்தொகை கண்டால் போதும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : $\overline{F} = 18zi - 12j + 3yk$ என்ற சார்புக்கு முதல் அரைக்கால் பகுதி வெளியில் (first octant) அமைந்த $2x+3y+6z=12$ எனும் தளத்தின் பகுதியில் பரப்பு வழித்தொகை காண்க.

XOY தளத்தில், கொடுக்கப்பட்ட பரப்பின் வீழ்ச்சி R எனில்

$$\iint_S \overline{F} \cdot \hat{n} dA = \iint_R \frac{\overline{F} \cdot \hat{n} dx dy}{|\hat{n} \cdot k|}$$

R என்பது ஈண்டு X, Y அச்சுகளுக்கும் $2x+3y+6z=12$. என்ற கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட முக்கோணப் பரப்பு ஆகும்.

$2x+3y+6z=12$ என்ற தளத்திற்குச் செங்கோட்டு வழி அமையும் வெக்டர் $\hat{n} = \nabla(2x+3y+6z-12)$

$$= \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right)(2x+3y+6z-12)$$

$$= 2i + 3j + 6k$$

$$\therefore\ \text{ஓரலகு வெக்டர் } \hat{n} = \frac{2i+3j+6k}{7}$$

$$\therefore \quad \overline{F} \cdot \hat{n} = (18zi - 12j + 3yk) \cdot \left(\frac{2i + 3j + 6k}{7}\right)$$

$$= \frac{36z - 36 + 18y}{7}$$

$$= \frac{6(12 - 2x - 3y) - 36 + 18y}{7}$$

$$= \frac{36 - 12x}{7}$$

$$\hat{n} \cdot k = \frac{2i + 3j + 6k}{7} \cdot k$$

$$= \frac{6}{7}$$

$$\therefore \iint_S \overline{F} \cdot \hat{n}\, dA = \iint_R \frac{\overline{F} \cdot \hat{n}\, dx\, dy}{|\hat{n} \cdot k|}$$

$$= \int_0^6 \int_0^{\frac{12-2x}{3}} \frac{36 - 12x}{7 \times \frac{6}{7}}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^6 \int_0^{\frac{12-2x}{3}} (6 - 2x)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^6 \frac{(6 - 2x)\, 2\, (6 - x)}{3}\, dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^6 (36 - 18x + 2x^2)\, dx$$

$$= \frac{2}{3} \left[36x - 9x^2 + 2\frac{x^3}{3} \right]_0^6$$

$$= \frac{2}{3} [216 - 324 + 144]$$

$$= \mathbf{24.}$$

எடுத்துக் காட்டு 2 : $\overline{F} = zi + xj - 3y^2zk$ என்ற சார்புக்கு $x^2+y^2=16$ என்ற உருளையின் முதல் அரைக்கால் பகுதி வெளியில் அமைந்த $z=0$, $z=5$ என்ற தளங்களுக்கிடைப்பட்ட பரப்பின்மீது பரப்பு வழித்தொகை காண்க.

S என்பது கொடுக்கப்பட்ட வளைதளப்பரப்பு எனவும், அதன் வீழ்ச்சி YOZ தளத்தில் R எனவும் கொள்க.

$$\therefore \iint_S \overline{F} \cdot \hat{n} dA = \iint_R \frac{\overline{F} \cdot \hat{n} dy dz}{|\hat{n} \cdot i|}$$

YOZ தளத்தில் கொடுக்கப்பட்ட பரப்பின் வீழ்ச்சி, $Y=0$விலிருந்து 4 வரையிலும், $Z=0$விலிருந்து 5 வரையிலும் உள்ள செவ்வகப் பரப்பாகும்.

$x^2+y^2-16=0$ என்ற பரப்பிற்குச் செங்குத்தான வெக்டர் $\overline{n} = \nabla (x^2+y^2-16)$

$$= \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right)(x^2+y^2-16)$$

$$= 2xi + 2yj$$

$$\therefore \text{ஓரலகு வெக்டர் } \hat{n} = \frac{xi+yj}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{xi+yj}{4} \quad (\because x^2+y^2=16)$$

$$\therefore \overline{F} \cdot \hat{n} = (zi+xj+3y^2zk) \cdot \left(\frac{ix+jy}{4}\right)$$

$$= \frac{xz+xy}{4}$$

$$\hat{n} \cdot i = \frac{(ix+jy)}{4} \cdot i$$

$$= \frac{x}{4}$$

$$\therefore \iint_S \overline{F} \cdot \hat{n}\, dA = \iint_R \frac{xz+xy}{4 \times \frac{x}{4}} dy dz$$

$$= \int_0^5 \int_0^4 (y+z)\, dy dz$$

$$= \int_{0}^{5} \left[yz + \frac{y^2}{2} \right]_{0}^{4} dz$$

$$= \int_{0}^{5} (4z+8)\, dz$$

$$= (2z^2+8z)\Big|_{0}^{5}$$

$$= 50+40 = 90.$$

எடுத்துக்காட்டு 3 : $\overline{F} = y^2 i + xyj - xzk$ என்ற சார்புக்கு $x^2+y^2+z^2 = a^2$ என்ற கோளத்தின் மேற்பாதிப்பரப்பின் மீது ஸ்டோக்கின் தேற்றம் பொருந்துகிறதா எனச் சரிபார்.

ஸ்டோக் தேற்றப்படி

$$\int_S \nabla \times \overline{F} \cdot d\overline{A} = \int_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$$

கொடுக்கப்பட்ட வளைதளப்பரப்பு $x^2+y^2+z^2 = a^2$ என்ற கோளத்தின் மேற்பாதிப் பரப்பாகும். எனவே வரம்பான வளைவரை XOY தளத்திலுள்ள $x^2+y^2 = a^2$ என்ற வட்டமாகும்.

$$\nabla \times \overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & xy & -xz \end{vmatrix}$$

$$= i\,(0-0) + j\,(0+z) + k\,(y-2y)$$

$$= zj - yk$$

மேலும் XOY தளத்தில் நுண்பரப்பு $d\overline{A} = dxdy\; k$

$$\therefore\ \nabla \times \overline{F} \cdot d\overline{A} = (zj - yk) \cdot dxdy\; k$$

$$= -y\, dxdy$$

$\therefore \int_S \nabla \times \overline{F} \cdot d\overline{A}$ என்ற தொகை XOY தளத்திலுள்ள $x^2+y^2 = a^2$ என்ற பரப்பு முழுதும் எடுக்கவேண்டும்.

$$\therefore \int_S \nabla \times \overline{F} \cdot d\overline{A} = -\int\int y\,dxdy$$

$$= -4 \int_{0}^{a} dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= -4\int_{o}^{a} \frac{(a^2-x^2)}{2}\,dx$$

$$= 2\left\{\frac{x^3}{3} - a^2x\right\}_{o}^{a}$$

$$= -\frac{4a^3}{3}$$

இனிக் கோட்டு வழித் தொகை காண்போம்.

$$\overline{F} = y^2i + xyj \qquad \{\because XOY \text{ தளத்தில் } z=0\}$$

$$d\overline{r} = dxi + dyj$$

மேலும் $x^2+y^2 = a^2$; $2x\,dx + 2y\,dy = 0$

$$\therefore \int_C \overline{F}\cdot d\overline{r} = \int_C (y^2i + xyj)\cdot(dxi + dyj)$$

$$= \int_C (y^2dx + xydy)$$

வளைவரையான வட்டம் Cயின் வில், XOY தளத்தில் $x=a$யி லிருந்து $x=0$ வரை அமைகிறது. $(x=a,\ y=0)$ எனும் புள்ளியி லிருந்து $(x=0,\ y=a)$ எனும் புள்ளி நோக்கித் தொகை காண்பது தான் மிகைத் திசையில் காண்பதாகும். அவ்வாறு கண்டு நான்கு மடங்காக எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

$$\therefore \int_c \overline{F}\cdot d\overline{r} = \int_c (y^2dx + xydy)$$

$$= \int_c (a^2-x^2)dx + \int_c x(-xdx)$$

$$= 4\{\int_a^o a^2dx - 2\int_a^o x^2dx\}$$

$$= 4\left\{\left(a^2x - 2\frac{x^3}{3}\right)_a^o\right\}$$

$$= 4\left\{-a^3 + 2\frac{a^3}{3}\right\}$$

$$= -\frac{4a^3}{3}$$

எனவே ஸ்டோக்கின் தேற்றம் நிறைவேற்றப்படுகிறது.

எடுத்து காட்டு 4: $\overline{F}=xzi-yj+x^3yk$ என்ற சார்புக்கு $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+y+2z=8$ என்ற தளங்களால் உருவாக்கப்படும் திண்மத்தின் XOY தளத்திலில்லாத மற்ற மூன்று பக்கப்பரப்புகளுக்கும் ஸ்டோக்கின் தேற்றத்தினைச் சரிபார்.

$$\overline{F} = xzi-yj+x^3yk$$

$$\nabla\times\overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & -y & x^3y \end{vmatrix}$$

$$= i(x^3-0)+j(x-3x^2y)+k(0-0)$$

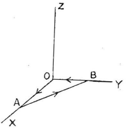
$$= x^3i+(x-3x^2y)j$$

XOY தளத்தில் $d\overline{A}=dxdyk$

$$\therefore \int_s \nabla\times\overline{F}\cdot d\overline{A}$$

$$= \int[x^3i+(x-3x^2y)j].dxdyk$$

$$= 0$$



படம் 106.

$2x+y+2z=8$ என்ற தளம் x அச்சினை $x=4$, $y=0$, $z=0$ என்ற இடத்திலும், y அச்சினை $(0,\ 8,\ 0)$ என்ற புள்ளியிலும் வெட்டுகிறது. $\therefore$ XOY தளத்தில் வரம்பு வளைவரை ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் ஆகும். பக்கங்களின் சமன்பாடுகள்; $y=0=z$; $z=0=x$; $2x+y=8$, $z=0$; என்பனவாகும்.

x அச்சின் வழியான கோட்டு வழித் தொகை $\int \overline{F}\cdot d\overline{r}$

$$= 0 \quad \{\because x \text{ அச்சில் } y=0=z \quad \therefore \overline{F}=0\}$$

y அச்சின் வழியாகக் கோட்டு வழித் தொகை

$$= \int_8^0 (-yj)\cdot dyj$$

$$= -\int_8^0 ydy = -\left[\frac{y^2}{2}\right]_8^0$$

$$= 32$$

$2x+y=8,\ z=0$ என்ற கோட்டில்,

$$2dx+dy = 0\ ;\quad dx = -\frac{dy}{2}$$

$$\therefore\ dr = idx+jdy$$

$\therefore$ கோட்டு வழித் தொகை $= \int \overline{F}\cdot d\overline{r}$

$$= \int_{y=0}^{8} (-yj+x^3yk)\cdot(dxi+dyj)$$

$$= -\int_{0}^{8} \cdot\, ydy = -32$$

$\therefore$ மொத்த கோட்டு வழித் தொகை $0-32+32=0$.

எனவே ஸ்டோக்கின் தேற்றம் நிறைவு செய்யப்படுகிறது.

{மேற்கண்ட இரு எடுத்துக்காட்டுகளிலும் வளைதளப் பரப்பின் மீது காணப்படும் பரப்பு வழித்தொகை, XOY தளத்தில் அதன் வீழ்ச்சிப் பரப்பின் மீது காணப்படும் பரப்பு வழித் தொகைக்குச் சமம் என்ற கொள்கை பயன்படுத்தப் பெற்றுள்ளது.}

எடுத்துக்காட்டு 5: φ என்பது திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பு எனில், ஸ்டோக் தேற்றத்தினைக் கொண்டு சுழல் (சரிவு φ) $=0$ எனக் காண்பி.

ஸ்டோக் தேற்றப்படி

$$\int_S \nabla\times(\nabla\varphi)\cdot d\overline{A} = \int_C \nabla\varphi\cdot d\overline{r}$$

$$= \int_C d\varphi$$

$= 0$ ஏனெனில் C ஒரு மூடிய வளைவரை.

$\therefore$ சுழல் (சரிவு φ) $= 0$.

§ 8·10. கன வழித் தொகை (Volume Integral)

V எனும் கன அளவு கொண்ட மூடிய வளைதளப்பரப்பு ஒன்றினை எடுத்துக் கொள்வோம். $\int_V \overline{F}dv$, $\int_V \varphi dv$ என்பன அக் கன அளவில் காணப்படும் கன வழித் தொகையாகும். $\overline{F}$ என்பது வெக்டர் சார்பு; φ என்பது திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பு. Δv என்பது நுண்ணிய மூலக

கன அளவானுல் $\Sigma\phi\Delta v$ என்பதன் எல்லை மதிப்பு, மூலக கன அளவு களின் எண்ணிக்கைக் கந்தழியையும், Δv பூச்சியத்தையும் நெருங்கும் போது இதன் எல்லை மதிப்பு $\int_V \phi dv$ ஆகும்.

எடுத்துக் காட்டு : $\overline{F} = (2x^2-3z)\,i - 2xyj - 4xk$ எனில் $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+2y+z=4$ என்ற தளங்களால் அடைபடும் கன அளவினுள் $\int \nabla\cdot\overline{F}\,dv$ன் மதிப்பும், $\int \nabla\times\overline{F}\,dv$ன் மதிப்பும் காண்க.

$$\nabla\cdot\overline{F} = \left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\overline{F}$$

$$= 4x-2x$$

$$= 2x$$

dv = மூல கன அளவு $= dxdydz$

x, y, zன் மதிப்புகள் zக்கு 0விலிருந்து $4-2x-2y$ வரை

yக்கு 0விலிருந்து $\frac{4-2x}{2}$ வரை

zக்கு 0விலிருந்து $\frac{4}{2}$ வரை மாறும்.

அதாவது $\int_V \nabla\cdot\overline{F}dv = \int_0^2\int_0^{2-x}\int_0^{4-2x-2y} 2x\,dxdydz$

$$= \int_0^2\int_0^{2-x} 2x\,dxdy\,(4-2x-2y)$$

$$= \int_0^2 \left(8xy-4x^2y-2xy^2\right)_0^{2-x} dx$$

$$= \int_0^2 \left[8x(2-x)-4x^2(2-x)-2x^2(2-x^2)\right] dx$$

$$= \int_0^2 (16x-8x^2-8x^2+4x^3-4x+8x^2-2x^3)\,dx$$

$$= \int_0^2 (8x-8x^2+2x^3)\,dx$$

$$= \left(4x^2 - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^4}{2}\right)_0^2$$

$$= 16 - \tfrac{64}{3} + 8 = \tfrac{8}{3}$$

$$\nabla \times \overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2 - 3z & -2xy & -4x \end{vmatrix}$$

$$= i\,(0-0) + j\,(-3+4) + k\,(-2y-0)$$

$$= j - 2yk$$

மேலும் $dv = dx\, dy\, dz$

$$\therefore \int_V \nabla \times \overline{F}\, dv = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{4-2x-2y} (j - 2yk)\, dx dy dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2-x} (j - 2yk)(4 - 2x - 2y)\, dx dy$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2-x} j\,(4 - 2x - 2y)\, dx dy - 2k \int_0^2 \int_0^{2-x} (4y - 2xy - 2y^2)\, dx dy$$

$$= j \int_0^2 \left(4y - 2xy - y^2\right)_0^{2-x} dx - 2k \int_0^2 \left(2y^2 - xy^2 - \frac{2y^3}{3}\right)_0^{2-x} dx$$

$$= j \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)\, dx - 2k \int_0^2 \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 4x + \tfrac{8}{3}\right) dx$$

$$= \tfrac{8}{3}\,(j - k).$$

§ 8·11. காஸின் பாய்வுத் தேற்றம் (Gauss' Theorem on Divergence)

ஒரு மூடிய வளைதளப் பரப்பு Sன் மீது, $\overline{F}$ எனும் வெக்டர்சார்பின் செங்கோட்டு வழிக் கூறின் பரப்பு வழித்தொகை, அம்மூடிய பரப்பினுள் உள்ள கனஅளவு முழுமையிலும் எடுக்கப்பட்ட, அச்சார்பின் பாய்வு மதிப்பின் கனவழித் தொகைக்குச் சமம் ஆகும்.

குறியீட்டில் $\int_S \overline{F} \cdot d\overline{A} = \int_v \nabla \cdot \overline{F} dv$

dv என்பது நுண்ணிய மூலகக் கன அளவாகும். $\hat{n}$ என்பது வளை தளப்பரப்புக்கு எந்த ஒரு புள்ளியிலும் வரையப்படும் ஓரலகு வெக்டர் செங்கோடு எனில், $d\overline{A} = \hat{n}dA$. {$dA$ என்பது நுண்ணிய பரப்பு}

$$\therefore \int_S \overline{F} \cdot \hat{n}dA = \int_v \nabla \cdot \overline{F}dv$$

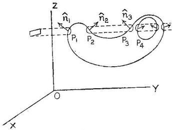
இடப்பக்கம் உள்ள தொகை S எனும் பரப்பு முழுமையிலும் காணப்பட வேண்டும். வலப்பக்கத் தொகை Sஞல் அடைக்கப்பெறும் v எனும் கன அளவு முழுவதிலும் காணப்படவேண்டும்.

$\overline{F} = Ui + Vj + Wk$ என்க. U, V, W என்பனவும் அவற்றின் வகைக்கெழுக்களும் எத்திசையிலும் ஒரே சீரானதாயும் வரம்புக்குட் பட்டதாயும் (finite) தொடர்ச்சியானதாகவும் எடுத்துக்கொள்ளப்படு கின்றன.

$$\nabla \cdot \overline{F} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$$

$$\therefore \int_v \nabla \cdot \overline{F}\, dU = \iiint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dxdydz$$

$$= \iiint \frac{\partial U}{\partial x} dxdydz + \iiint \frac{\partial V}{\partial y} dxdydz + \iiint \frac{\partial W}{\partial z} dxdydz$$



படம் 107.

கனவழித்தொகை

$$I = \iiint \frac{\partial V}{\partial y}\, dx dy dz \text{ என்பதை எடுத்துக்கொள்வோம்.}$$

இங்கு நுண் கனஅளவு dvக்கு $dxdydz$ என மூவளவைகளில் எழுதப்பட்டுள்ளது. z, xன் நிலைமதிப்புகளுக்குத்தக, y மாறும்போது ஒரு செவ்வகப்பட்டை கிடைக்கும். இது z, $z+dz$, x, $x+dx$ எனும் தளங்களால் உருவாக்கப்பெற்று, அதன் செங்குத்து வெட்டுமுகப் பரப்பு $dzdx$ என்பதாய் அமையும். இப்பட்டை மூடிய வளைதளத்தினை இரட்டைப்படை எண்ணிக்கையான புள்ளிகளில் வெட்டும். படத்தில் காட்டியுள்ளபடி வளைதளத்தினுள் நுழையும் புள்ளிகள் P_1, P_3...... என அடிக்குறிகள் ஒற்றைப்படை எண் கொண்டவைகளாகவும், வெளிவரும் புள்ளிகள் P_2, P_4 ...... என இரட்டைப்படையான அடிக்குறிகள் கொண்டவையாகவும் இருக்கும். எனவே z, xன் நிலைமதிப்புகளுக்கு

$$\iiint \frac{\partial V}{\partial y}\, dx dy dz \text{ஐத் தொகை கண்டால், } P_1, P_2 \ldots\ldots$$

P_{2n} முதலிய புள்ளிகளில் Vன் மதிப்புகள் முறையே V_1, V_2 ...... V_{2n} எனில்,

$$I = \iint (-V_1 + V_2 - V_3 + \ldots + V_{2n})\, dz dx \text{ என்றாகும்.}$$

P_r என்ற புள்ளியில் பட்டை, மொத்தத் தளத்தில் வெட்டும் பரப்பு dA_r என்க. அப்படியானால் இவற்றின் வீழ்ச்சிகள் XOZ தளத்தில் எல்லாமே $dzdx$க்குச் சமமாகும். அதாவது P_rல் ஓரலகுச் செங்கோடு $\hat{n}_r$ எனில்,

$$dzdx = -dA_r \hat{n}_r \cdot j, \quad r \text{ ஒற்றைப்படையெனில்,}$$
$$= dA_r \hat{n}_r \cdot j, \quad r \text{ இரட்டைப் படையெனில்.}$$

ஏனெனில் உள்நுழையும் புள்ளிகளில் தளத்திற்கு வரையப்படும் ஓரலகுச் செங்கோடுகள் $dzdx$க்குச் செங்குத்தான jயின் திசையுடன் விரிகோணத்தையும், வெளியேறும் புள்ளியில் உள்ள ஓரலகுச் செங்கோடுகள் குறுங்கோணத்தையும் உருவாக்குகின்றன. எனவே மேற்கண்ட தொகை

$$I = \int (V_1 \hat{n}_1 \cdot j dA_1 + V_2 \hat{n}_2 \cdot j dA_2 + \ldots + V_{2n} \hat{n}_{2n} \cdot j dA_{2n})$$

(தொகை காணும் மாறி பரப்பளவாகையால் ஒரு தொகைக் குறியீடு இடப்பட்டுள்ளது)

இதுபோன்றே எல்லா விதங்களிலும் y அச்சுக்கு இணையான செவ்வகப்பட்டைகளாய்ப் பிரித்து எடுத்துக் கூட்டினால், மொத்தக்கன அளவுக்கும் காணப்படும் தொகை

$$\int\int\int \frac{\partial V}{\partial y}\, dxdydz = \int Vj \cdot d\overline{A} \text{ என்ருகும்.}$$

இதுபோன்றே $$\int\int\int \frac{\partial W}{\partial z}\, dxdydz = \int Wk \cdot d\overline{A}$$

$$\int\int\int \frac{\partial U}{\partial x}\, dxdydz = \int Ui \cdot dA$$

எனவும் கிடைக்கும்.

∴ மூன்றினையும் கூட்டினால்,

$$\int\int\int \frac{\partial U}{\partial x}\, dxdydz + \int\int\int \frac{\partial V}{\partial y}\, dxdydz + \int\int\int \frac{\partial W}{\partial z}\, dxdydz$$

$$= \int (Ui + Vj + Wk) \cdot d\overline{A}$$

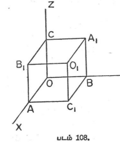
i.e. $\int_V (\nabla \cdot \overline{F})\, dv = \int_S \overline{F} \cdot d\overline{A}$

இதுவே காஸின் பாய்வுத் தேற்றமாகும்.

§ 8·12. பாய்வுத் தேற்றத்தின் இயற்பியல் விளக்கம்

$\overline{F}$ எனும் திசைவேகத்துடன் இயங்கிக்கொண்டிருக்கும் அரை நீர்மப் பகுதி ஒன்றினுள் மூடிய வளைதளப் பரப்பு S ஒன்றினை எடுத்துக்கொள்வோம். இப்பரப்பின் வழிச்செல்லும் அரை நீர்மத்தின் அளவை இரு வழிகளில் காணலாம். (i) பரப்பிற்குச் செங்கோட்டின் வழியில் வெளிப்பாயும் மொத்த அளவினைக் கணக்கிடலாம். இது $\int_S \overline{F} \cdot d\overline{A}$ ஆகும். (ii) வளைதளப் பரப்பினுள் முழு கன அளவிலுமாக, ஓரலகு கன அளவிற்கு எவ்வளவு அரை நீர்மம் பாய்கிறது என்பதைக் கணக்கிட்டும் அறியலாம். இது $\nabla \cdot \overline{F}$ எனும் $\overline{F}$ன் பாய்வ மதிப்பாகும். dv எனும் நுண் கன அளவின் வழியே ஒரு செகண்டில் பாயும் அரை நீர்ம அளவு $\nabla \cdot \overline{F} dv$. இதனை அக் கன அளவு முழுதும் கண்டு கூட்டினால் $\int_V \nabla \cdot \overline{F} dv$ கிடைக்கும். இவ்விரண்டு அளவுகளும் சமமாகையால் $\int_S \overline{F} \cdot d\overline{A} = \int_V \nabla \cdot \overline{F} dv$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : பாய்வுத் தேற்றத்தினை $\overline{F} = 4xzi - y^2j + yzk$ என்ற சார்பிற்கு $x=0$, $x=1$, $y=0$; $y=1$, $z=0$; $z=1$ என்ற தளங்களால் உருவாக்கப் பெற்ற சதுரத் திண்மத்திற்கு (கன சதுரத்திற்கு)ச் சரிபார்க்கவும்.



படம் 108.

$\because \overline{F} = 4xzi - y^2j + yzk$

$$\Delta \cdot \overline{F} = \frac{\partial}{\partial x}(4xy) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz)$$

$$= 4z - 2y + y$$

$$= 4z - y$$

$\therefore$ கனவழித் தொகை $\int\limits_V \nabla \cdot F dv$

$= \int\int\int (4z - y)\, dxdydz$. இதனைக் கன சதுரம் முழுவதிலும் தொகை காண வேண்டும். கன சதுரத்தில் x, y, z முதலியன 0விலிருந்து 1 வரை மாறுகின்றன. எனவே,

$$= \int\int\int (4z - y)\, dxdydz$$

$$= \int\int \left(4zx - yx\right)_{x=0}^{1} dydz$$

$$= \int\int (4z - y)\, dydz$$

$$= \int \left(4zy - \frac{y^2}{2}\right)_{y=0}^{1} dz$$

$$= \int (4z - \tfrac{1}{2})\, dz$$

$$= \left(2z^2 - \frac{z}{2}\right)_{z=0}^{1}$$

$$= 2 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}$$

பரப்பு வழித்தொகை $\int\limits_S \overline{F} \cdot d\overline{A}$ கன சதுரத்தின் மொத்தப் பரப்பிற்கும் எடுக்கப்பட வேண்டும். கன சதுரத்திற்கு மொத்தம் ஆறு

பக்கங்கள் உள்ளன. $OBC_1A\,(S_1)$; $OCA_1B\,(S_2)$; $OAB_1C\,(S_3)$; $AC_1O_1B_1\,(S_4)$; $C_1BA_1O\,(S_5)$; $CB_1O_1A_1\,(S_6)$ என்பவை அந்தச் சம தளங்களாகும். இவற்றிற்கு ஓரலகுச் செங்கோட்டு வெக்டர்கள் முறையே $-k,\ -i,\ -j,\ i,\ j,\ k$ என்பனவாகும்.

$$\therefore \int_S \overline{F}\cdot d\overline{A} = \int_{S_1} \overline{F}\cdot \hat{n}_1 dA + \int_{S_2} \overline{F}\cdot \hat{n}_2 dA + \dots \int_{S_6} \overline{F}\cdot \hat{n}_6 dA$$

$$\int_{S_1} \overline{F}\cdot \hat{n}_1 dA = \iint (4xzi - y^2j + yzk)\cdot(-k)\,dxdy$$

(ஏனெனில் XOY தளத்தில் நுண்பரப்பு $dxdy$ ஆகும்)

$$= -\iint yzdxdy$$

$$= 0 \quad \{\because XOY \text{ தளத்தில் } z = 0$$

$$\int_{S_2} \overline{F}\cdot \hat{n}_2 dA = \iint (4xzi - y^2j + yzk)\cdot(-i)\,dydz$$

$$= -\iint 4xz\,dydz$$

$$= 0 \quad \{\because YOZ \text{ தளத்தில் } x = 0\}$$

$$\int_{S_3} \overline{F}\cdot \hat{n}_3 dA = \iint (4xzi - y^2j + yzk)\cdot(-j)dzdx$$

$$= \iint y^2dzdx$$

$$= 0 \quad \{\because ZOX \text{ தளத்தில் } y = 0\}$$

$$\int_{S_4} \overline{F}\cdot \hat{n}_4 dA = \iint (4xzi - y^2j + yzk)\cdot idydz$$

$$= \iint 4xzdydz$$

$$= \int_0^1 4x\left(\frac{z^2}{2}\right)dy$$

$$= \int 2xdy = \Big[2xy\Big]_0^1$$

$$= 2x$$

$$= 2 \quad \{\because AC_1O_1B_1 \text{ல் } x = 1\}$$

$$\int_{S_5} \overline{F}\cdot \hat{n}_5 dA = \iint (4xzi - y^2j + yzk)\cdot jdxdz$$

$$= -\iint y^2dxdz$$

$$= -\iint dxdz \quad \{\because y = 1\}$$

$$= -1\{\because \iint dxdz = \text{சதுரம் } C_1BA_1O\text{வின் பரப்பு}\}$$

$$\int\limits_{S_6}\int \overline{F}\cdot \hat{n}_6 dA = \int\int (4xzi - y^2j + yzk)\cdot k\,dxdy$$

$$= \int\int yzdxdy$$

$$= \int\int ydxdy \quad \{\because z = 1$$

$$= \int \left(\frac{y^2}{2}\right)_0^1 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\,[x]_0^1$$

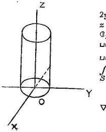
$$= \tfrac{1}{2}$$

∴ பரப்பு வழித் தொகைகளின் கூட்டல் $= 0+0+0+2-1+\frac{1}{2}$

$= \frac{3}{2}$

$=$ கனவழித் தொகை.

எனவே $\int\limits_S \overline{F}\cdot d\overline{A} = \int\limits_V \nabla\cdot\overline{F}dv$



படம் 109.

எடுத்துக்காட்டு 2: $\overline{F} = 4xi - 2y^2j + z^3k$ என்ற சார்புக்கு $x^2+y^2=4$; $z=0$; $z=3$ என்ற பகுதியில் பாய்வுத் தேற்றம் பொருந்துகிறதா எனச் சரி பார்க்க.

பாய்வுத் தேற்றப்படி

$$\int\limits_S \overline{F}\cdot d\overline{A} = \int\limits_V \nabla\cdot\overline{F}dv$$

$$\overline{F} = 4xi - 2y^2j + z^3k$$

$$\nabla\cdot\overline{F} = \frac{\partial}{\partial x}(4x) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3)$$

$$= 4 - 4y + 3z^2$$

$$\therefore \int\limits_V \nabla\cdot\overline{F}\,dv = \int\int\int (4-4y+3z^2)\,dxdydz$$

$$= \int\int (4z - 4yz + z^3)_{z=0}^{3}\,dzdy$$

$$= \int\int (12 - 12y + 27)\,dxdy$$

$$= \int\int (39 - 12y)\,dxdy$$

x-ன் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பிற்குத் தக, y ஆனது $-\sqrt{4-x^2}$-ல் இருந்து $+\sqrt{4-x^2}$ வரை மாறுவதால்,

$$\int_V \nabla\cdot\overline{F}dv = \int (39y-6y^2)dx \Big|_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \int 78\sqrt{4-x^2}\,dx$$

x ஆனது -2ல் இருந்து $+2$ வரை மாறும்.

$$\therefore \int_V \nabla\cdot\overline{F}dv = 78\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$= 78\times 2\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$= 156\left\{2\sin^{-1}\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}\right\}_0^2$$

$$= 156\left\{2\,\frac{\pi}{2}\right\} = \mathbf{156\pi}$$

இனி பரப்பு வழித் தொகை காணப்படவேண்டும். XOY தளத்தி லுள்ள வட்டப் பரப்பு (S_1); $z=3$ என்ற தளத்திலுள்ள வட்டப்பரப்பு (S_2); $x^2+y^2=4$ என்ற வளைதளப்பரப்பு (S_3); ஆக மூன்று பரப்புகள் உள்ளன. XOY தளத்திலுள்ள பரப்பிற்குச் செங்குத்து ஓரலகு வெக்டர் $-k$; $z=3$ எனும் தளத்திலுள்ள பரப்பிற்கு k; $x^2+y^2=4$ என்ற வளைதளப் பரப்பிற்குச் செங்குத்து வெக்டர்

$$= \nabla(x^2+y^2-4)$$

$$= i2x+j2y$$

$$\therefore \text{ஓரலகு வெக்டர்} = \frac{ix+jy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{ix+jy}{2} \quad \{\because x^2+y^2=4\}$$

$$\therefore \int_{S_1}\overline{F}\cdot d\overline{A} = \int_{S_1}\overline{F}\cdot\hat{n}_1\,dA$$

$$= \int\int(4xi-2y^2j+z^3k)\cdot(-k)\,dxdy$$

$$= -\int\int z^3dxdy = 0 \quad (\because XOY \text{ தளத்தில் } z=0)$$

$$\int_{S_2} \overline{F} \cdot d\overline{A} = \int\int (4xi - 2y^2j + z^3k) \cdot k\, dxdy$$

$$= \int\int z^3\, dxdy$$

$$= 27 \int\int dxdy \qquad \{\because z = 3\}$$

$$= 27\pi \cdot (2)^2$$

$$= 108\pi \qquad \{\because \int\int dxdy = \text{வட்டப் பரப்பு}\}$$

$$\int_{S_3} \overline{F} \cdot d\overline{A} = \int\int (4xi - 2y^2j + z^3k) \cdot \left(\frac{ix + jy}{2}\right) 2d\theta\, dz$$

{∵ வளைதளப் பரப்பில் மூலகப் பரப்பு $= r d\theta\, dz = 2\, d\theta\, dz$}

வளைதளப் பரப்பில் உள்ள புள்ளியை $x = 2 \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \int_{S_3} \overline{F} \cdot d\overline{A} = \int\int (4x^2 - 2x^3)\, d\theta\, dz$$

$$= \int\int (16 \cos^2 \theta - 16 \sin^3 \theta)\, d\theta \cdot dz$$

$$= \int (16 \cos^2 \theta - 6 \sin^3 \theta)\, (z)_0^3\, d\theta$$

$$= 48 \int (\cos^2 \theta - \sin^3 \theta)\, d\theta.$$

θ வின் மதிப்பு 0விலிருந்து 2π வரையிலும் மாறும்.

$$\therefore \int_{S_3} \overline{F} \cdot \hat{n}\, dA = 48 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\, d\theta - 48 \int_0^{2\pi} \frac{3 \sin\theta - \sin 3\theta}{4}\, d\theta$$

$$= 24 \left(\int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^{2\pi} \cos 2\theta\, d\theta \right)$$

$$- 12 \left[3 \int_0^{2\pi} \sin \theta\, d\theta - \int_0^{2\pi} \sin 3\theta\, d\theta \right]$$

$$= 24 \left\{ 2\pi + \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \right\}$$

$$- 12 \left\{ 3 \left(\frac{-\cos \theta}{} \right)_0^{2\pi} + \left(\frac{\cos 3\theta}{3} \right)_0^{2\pi} \right\}$$

$$= 48\pi$$

$\therefore$ மொத்தப் பரப்பு வழித்தொகை

$$= 108\pi + 48\pi$$

$$= 156\pi$$

எனவே $\int\limits_S \overline{F} \cdot d\overline{A} = \int\limits_V \nabla \cdot \overline{F} dv$

எடுத்துக்காட்டு 3 : S எனும் ஒரு மூடிய வளைதளப் பரப்பிற்கு $\iint\limits_S \overline{r} \cdot \hat{n} dA$ன் மதிப்பினைக் காண்க.

$$\overline{r} = xi + yj + zk.$$

காஸின் பாய்வுத் தேற்றப்படி

$$\iint\limits_S \overline{r} \cdot \hat{n} dA = \iiint\limits_V \nabla \cdot \overline{r} dv$$

$$= \iiint\limits_V \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (xi + yj + zk)\, dv$$

$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dv$$

$$= \iiint 3dv$$

$= 3\,V$ { V என்பது Sஆல் அடைபடும் கன அளவு எனில் }.

எடுத்துக்காட்டு 4 : பாய்வுத் தேற்றத்தினைக்கொண்டு $\int\limits_V \nabla \varphi dv = \int\limits_S \varphi \hat{n} dA$ எனவும், $-\int\limits_V \nabla \times \overline{F} dv = \int\limits_S \overline{F} \times \hat{n} dA$ எனவும் நிறுவுக.

(i) பாய்வுத் தேற்றப்படி $\int\limits_V \nabla \cdot \overline{F} dv = \int\limits_S \overline{F} \cdot \hat{n} dA$

$\overline{F} = \varphi\, \overline{c}$ என்க ; $\overline{c}$ என்பது ஒரு மாறிலி வெக்டர் என்க.

$$\therefore \int\limits_V \nabla \cdot (\varphi\, \overline{c})\, dv = \int\limits_S \varphi\, \overline{c} \cdot \hat{n} dA$$

ஆனால் $\nabla \cdot (\varphi\, \overline{c}) = \nabla \varphi \cdot \overline{c} + \varphi \nabla \cdot \overline{c}$

$= \nabla \varphi \cdot \overline{c}$ { $\because$ $\overline{c}$ ஒரு மாறிலி வெக்டர் $\therefore \nabla \cdot \overline{c} = 0$ }

$$\therefore \int\limits_V \nabla \cdot (\varphi\, \overline{c})\, dv = \int\limits_V \nabla \varphi \cdot \overline{c} dv$$

$$= \int\limits_S \varphi \hat{n} \cdot \overline{c} dA$$

$\bar{c}$ என்பது யாதாமொரு மாறிலி வெக்டராகையால், இருபுறமும் அதனை நீக்கிவிடின்,

$$\int_V \nabla \varphi \, dv = \int_S \varphi \hat{n} \, dA$$

(ii) பாய்வுத் தேற்றப்படி

$$\int_V \nabla \cdot \bar{F} \, dv = \int_S \bar{F} \cdot \hat{n} \, dA$$

$\bar{F} = \bar{c} \times \bar{\varphi}$ என்க. $\bar{c}$ என்பது ஒரு மாறிலி வெக்டர்.

$$\therefore \int_V \nabla \cdot \bar{F} \, dv = \int_V \nabla \cdot (\bar{c} \times \bar{\varphi}) \, dv = \int_S \bar{c} \times \bar{\varphi} \cdot n \, dA$$

ஆனால் $\bar{c} \times \bar{\varphi} \cdot \hat{n} = \bar{c} \cdot \bar{\varphi} \times \hat{n}$

மேலும் $\nabla \cdot (\bar{c} \times \bar{\varphi}) = \varphi \cdot (\nabla \times \bar{c}) - \bar{c} \cdot (\nabla \times \bar{\varphi})$

$= -\bar{c} \cdot (\nabla \times \bar{\varphi})$ $\{ \because \bar{c}$ மாறிலி வெக்டர் $\therefore \nabla \times \bar{c} = 0 \}$

$$\therefore -\int_V \bar{c} \cdot (\Delta \times \bar{\varphi}) dv = \int_S \bar{c} \cdot (\bar{\varphi} \times \hat{n}) dA$$

$\bar{c}$ யாதாமொரு மாறிலி வெக்டராகையால், இருபுறமும் அதனை நீக்கிவிட,

$$-\int_V \nabla \times \bar{\varphi} \, dv = \int_S \varphi \times \hat{n} \, dA$$ எனக் கிடைக்கும்.

எடுத்துக் காட்டு 5 : $\bar{A} = \nabla \varphi$, $\nabla^2 \varphi = 0$ எனில் $\int_V \bar{A}^2 dv = \int_S \varphi \bar{A} \cdot \hat{n} ds$ எனக் காண்பி.

பாய்வு $(\varphi \bar{A}) = \varphi$ பாய்வு $\bar{A} + \nabla \varphi \cdot \bar{A}$

$= \varphi (\nabla \cdot \bar{A}) + \nabla \varphi \cdot \bar{A}$

$= \varphi \{ \nabla \cdot \nabla \varphi \} + \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi$

$= \varphi \nabla^2 \varphi + (\nabla \varphi)^2$

$= \bar{A}^2$ $\{ \because \nabla^2 \varphi = 0 \ \& \ \nabla \varphi = \bar{A} \}$

$\therefore$ பாய்வு தேற்றப்படி,

$$\int_S \varphi \bar{A} \cdot \hat{n} ds = \int_V \nabla \cdot (\varphi \bar{A}) \, dv$$

$$= \int_V \bar{A}^2 dv$$

(இங்கு நுண்பரப்பினை dS எனக் குறித்துள்ளோம்; A என்பது சார்பாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளபடியால், ஐயமெழாதிருக்க dAயினை விடுத்து dS எனக் குறித்துள்ளோம்.)

எடுத்துக்காட்டு 6 : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ என்ற நீள்வட்டத் திண்மத்தின் (ellipsoid) புறப்பரப்பு முழுவதிலும், $\int_S (x^2i+y^2j+z^2k)\cdot \hat{n}dA$ என்ற தொகையைக் காண்க.

$$\overline{F} = x^2i+y^2j+z^2k$$

$$\text{பாய்வு } \overline{F} = \nabla\cdot\overline{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2)$$

$$= 2x+2y+2z$$

காஸின் பாய்வுத் தேற்றப்படி $\int_V \nabla\cdot\overline{F}dv = \int_S \overline{F}\cdot\hat{n}dA$

$$\therefore \int_S (x^2i+y^2j+z^2k)\cdot\hat{n}$$

$$= \int_V \nabla\cdot(x^2i+y^2j+z^2k)\,dv$$

$$= \iiint 2(x+y+z)\,dx dy dz.$$

இத்தொகை காண்பதில்

z ஆனது $-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ல் இருந்து $+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ வரையும்,

y ஆனது $-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ல் இருந்து $+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ வரையும்,

x ஆனது $-a$யிலிருந்து $+a$ வரையும் மாறும். ஆனல் $x+y+z$, ஒவ்வொரு மாறியிலும் ஒற்றைப்படைச் சார்பாதலால் சமச்சீரான (symmetric) எல்லைகளுக்கு இடையில் தொகை கண்டால் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \int_S (x^2i+y^2j+z^2k)\cdot\hat{n}dA = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 7 : $\int_S \frac{\overline{r}\cdot\hat{n}dA}{r^3}$ எனும் தொகையை V எனும் கன அளவை உள்ளடக்கிய வளைதளப்பரப்பு Sன் மீது காண்க.

வகை 1: ஆதி Sக்கு வெளியேயிருந்தால், $\overline{F} = \frac{\overline{r}}{r^3}$ எனும் சார்பு Sன் உள்ளிலும் பரப்பிலும் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியான தாயும், வகையிடத்தக்கதாயும் அமையும்.

$$\therefore \int_S \frac{\overline{r}\cdot\hat{n}\,dA}{r^3} = \int \nabla\cdot\left(\frac{\overline{r}}{r^3}\right)dv$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\overline{r}}{r^3}\right) = \left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\frac{\overline{r}}{r^3}$$

$$= \left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{xi+yj+zk}{r^3}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial\left(\frac{z}{r^3}\right)}{\partial z}$$

$$= \frac{r^3\cdot 1 - x3r^2\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}{r^6}+\frac{r^3\cdot 1 - y\cdot 3r^2\frac{\partial r}{\partial y}}{r^6}+\frac{r^3\cdot 1 - z\cdot 3r^2\frac{\partial r}{\partial z}}{r^6}$$

$$= \frac{3r^3 - 3r^2\left(x\frac{\partial r}{\partial x}+y\frac{\partial r}{\partial y}+z\frac{\partial r}{\partial z}\right)}{r^6}$$

$$= \frac{3r^3 - 3r^2\left(x\cdot\frac{x}{r}+y\cdot\frac{y}{r}+z\cdot\frac{z}{r}\right)}{r^6}$$

$$= \frac{3r^3 - 3r^3}{r^6} \quad (\because\ x^2+y^2+z^2=r^2)$$

$$= 0$$

$$\therefore \int_V \nabla\cdot\left(\frac{\overline{r}}{r^3}\right)dv = 0$$

எனவே $\int_S \frac{\overline{r}\cdot\hat{n}}{r^3}\,dA$ம் பூச்சியமாகும்.

வகை 2: ஆதி Sக்குள் இருந்தால், $\overline{F} = \frac{\overline{r}}{r^3}$ என்பது ஆதியில் தொடர்ச்சியற்றதாகி விடுகிறது. எனவே பாய்வுத் தேற்றத்தினை Sன்

உட்பகுதி முழுவதற்கும் பொருந்தும் எனச் சொல்ல இயலாது. ஆதியைச் சுற்றிலும் 'a' எனும் ஆரமுடைய கோளம் S^1 ஒன்றினை எடுத்துக்கொண்டு, S^1க்கு வெளியிலும், Sக்கு உள்ளுமாக அமைந்த, V^1 எனும் கனஅளவு கொண்ட பகுதியை எடுத்துக்கொண்டால், அப்பகுதி முழுவதும் $\overline{F}$ தொடர்ச்சியானதாயும், வகையிடத் தக்கதாயும், அமையும். எனவே அப்பகுதியில் பாய்வுத் தேற்றத்தினைப் பயன்படுத்தலாம். S^1ன் மையத்தை நோக்கிய திசையில் அப்பரப்பின் செங்கோட்டு வெக்டர் எடுக்கப்பட வேண்டும். பாய்வுத் தேற்றப்படி

$$\int_S \frac{\overline{r}\cdot\hat{n}}{r^3}\,dA + \int_{S^1} \frac{\overline{r}\cdot\hat{n}}{r^3}\,dA = \int_{V^1} \nabla\cdot\left(\frac{\overline{r}}{r^3}\right)dv$$

$$= 0$$

ஆனால் $\displaystyle\int_{S^1} \frac{\overline{r}\cdot\hat{n}}{r^3}dA = -\int \frac{\overline{r}\cdot\overline{r}}{r^3 a}\,dA$

(ஏனெனில் S^1க்குச் செங்கோட்டு ஓரலகு வெக்டர் $-\dfrac{\overline{r}}{a}$)

$$= -\int \frac{\overline{r}^2 dA}{r^3 a} = -\int \frac{dA}{ra}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int_{S^1} dA \quad \{S^{\prime}\text{ல் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் } r=a \text{ என்பதால்}\}$$

$$= -\frac{1}{a^2}\,4\pi a^2$$

$$= -4\pi$$

$$\therefore \int_S \frac{\overline{r}\cdot\hat{n}\,dA}{r^3} - 4\pi = 0$$

i.e. $\displaystyle\int_S \frac{\overline{r}\cdot\hat{n}\,dA}{r^3} = 4\pi.$

§ 8·13. பாய்வுத் தேற்றத்திலிருந்து சில வழி முடிவுகள்

(i) பாய்வுத் தேற்றத்தின் நிறுவலின்போது,

$$\int \frac{\partial U}{\partial x}\,dv = \int Ui\cdot d\overline{A},$$

$$\int \frac{\partial V}{\partial y}\,dv = \int Vj\cdot d\overline{A};$$

$$\int \frac{\partial W}{\partial z}\, dv = \int Wk \cdot d\overline{A}$$

எனக்காட்டிஞேம். $U = V = W$ எனில், இச்சமன்பாடுகளை முறையே i, j, k களினுல் பெருக்கிக் கூட்டினுல்,

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial x}\, i + \frac{\partial U}{\partial y}\, j + \frac{\partial U}{\partial z}\, k \right) dv$$

$$= \int U(i.\hat{n}i + j.\hat{n}j + k.\hat{n}k)\, dA$$

$$(\because\ d\overline{A} = \hat{n}dA)$$

$$= \int U\hat{n}dA$$

i.e. $\int_V \nabla U dv = \int_S U\hat{n}dA.$

அதாவது ஒரு திசையிலிச் சார்பின் சரிவின் கன வழித்தொகை, பரப்பின் வரம்பில் அச்சார்பு அடையும் மதிப்புகளில் எழுதப் பெறும்.

(ii) $\overline{V} \times \overline{d}$ என்ற வெக்டர் பெருக்கலில் $\overline{V}$ என்பது வெக்டர் புள்ளிச் சார்பு; $\overline{d}$ என்பது மாறிலியான வெக்டர்.

$\therefore$ பாய்வு $(\overline{V} \times \overline{d}) = \nabla \cdot (\overline{V} \times \overline{d})$

$= \overline{d} \cdot (\nabla \times \overline{V})$

$= \overline{d} \cdot$ சுழல் $\overline{V}$

$\therefore \int \nabla \cdot (\overline{V} \times \overline{d}) dv = \int (\overline{V} \times \overline{d}) \cdot d\overline{A}$

i.e. $\int \overline{d} \cdot$ (சுழல் $\overline{V}$) $dv = \int (\overline{V} \times \overline{d}) \cdot \hat{n}dA$

$= \int \hat{n} \cdot (\overline{V} \times \overline{d})\, dA$

$= \int (\hat{n} \times \overline{V}) \cdot \overline{d}\, dA$

i.e. $\overline{d} \cdot \int_v$ சுழல் $\overline{V}\, dv = \overline{d} \cdot \int_s \hat{n} \times dA$

இது $\overline{d}$யின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பொருந்துமாகையால், அதனை நீக்கிடின்,

$\int_v$ சுழல் $\overline{V} dv = \int_S \hat{n} \times \overline{V} dA$

இம்முடிவை மிகநுண்ணிய மூடிய வளைபரப்பிற்குப் பயன் படுத்துவோமானுல்,

சுழல் $\overline{V} dv = \int \hat{n} \times \overline{V} dA$

$\therefore$ சுழல் $\overline{V} = \frac{1}{dv} \int \hat{n} \times \overline{V} dA$ I

இதேபோன்று காஸின் பாய்வுத் தேற்றத்தினை ஒரு நுண்ணிய மூடிய வளைவரைக்குப் பயன்படுத்துவோமேயானுல்,

$$\text{பாய்வு } F dv \quad = \int F \cdot \hat{n} dA$$

$$\therefore \text{ பாய்வு } F = \frac{1}{dv} \int \overline{F} \cdot \hat{n} dA \qquad \text{II}$$

இவ்விரண்டு முடிவுகளும் முறையே சுழல் $\overline{V}$, பாய்வு $\overline{F}$ ஆகிய வற்றின் புதுவரையறைகளாக எடுத்துக்கொள்ளப் பெறும். இவற்றில் வரும் தொகைகள் ஆயங்களைச்சாராதவை. ஆகையால் மாற்றமிலி களாக (Invariants) விளங்குகின்றன.

8·14. கிரீனின் தேற்றம் (Green's theorem)

U, V என்பன இருதிசையிலிப் புள்ளிச் சார்புகள் என்க. இவை களும் இவற்றின் வகைக்கெழுக்களும் எத்திசையிலும் ஒரே சீரானவை யாகவும் தொடர்ச்சியானவையாகவும், ஒரு மூடிய வளைதளப்பரப்பு அடைக்கும் பகுதியில் அமையட்டும். பாய்வுத் தேற்றத்தினை $U\nabla V$ என்ற வெக்டர் சார்புக்குப் பயன்படுத்தினால்,

$$\nabla \cdot (U\nabla V) = \nabla U \cdot \nabla V + U\nabla^2 V$$

காஸின் தேற்றத்திலிருந்து,

$$\int_S U\nabla V \cdot \hat{n} dA = \int_v \nabla \cdot (U\nabla V) dv$$

$$= \int_v (\nabla U \cdot \nabla V + U\nabla^2 V) dv$$

Uவையும் Vயையும் இடமாற்றிக்கொண்டால்,

$$\int_S V\nabla U \cdot \hat{n} dA = \int_v (\nabla V \cdot \nabla U + V\nabla^2 U) dv$$

$$\therefore \int \nabla U \cdot \nabla V dv = \int U\nabla V \cdot \hat{n} dA - \int U\nabla^2 V dv$$

$$\text{அல்லது} = \int V\nabla U \cdot \hat{n} dA - \int V\nabla^2 U dv$$

இம்முடிவுகளை, கிரீனின் தேற்றம் என அழைப்பர். இவை கணித இயற்பியலில் (Mathematical physics) வெகுவாய்ப் பயன்படும். இம்முடிவுகளிலிருந்து,

$$\int U\nabla V \cdot \hat{n} dA - \int U\nabla^2 V dv$$

$$= \int V\nabla U \cdot \hat{n} dA - \int V\nabla^2 U dv$$

$$\therefore \int (U\nabla V - V\nabla U) \cdot \hat{n} dA = \int (U\nabla^2 V - V\nabla^2 U) dv$$

இம்முடிவும் கிரீனின் தேற்றம் என அழைக்கப்படும். இச்சமன்பாட்டில் இடப்பக்கத்தினை

$\int\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)dA$ என எழுதலாம். $\frac{\partial V}{\partial n}$ என்பது பரப்பிற்கு வெளிமுகச் செங்கோட்டின் வழியான Vன் திசைவகைக் கெழுவாகும்.

லாப்ளாசின் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் U எனும் புள்ளிச் சார்பு, அதாவது $\nabla^2 U=0$ எனில் U எனும் சார்பு, கொடுக்கப்பட்ட பகுதிக்கு (region) இசைச் சார்பு, (Harmonic function) எனப் படும். எனவே,

$$\int \nabla U\,.\,\nabla V dv = \int V\hat{n}\,.\,\Delta U dA - \int V\nabla^2 U dv$$
$$= \int V\nabla U\,.\,\hat{n} dA \text{ என்றாகும்.}$$

U, V இரண்டுமே இசைச் சார்புகளாயின்,

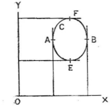
$$\nabla^2 U,\ \nabla^2 V = 0$$

$$\therefore\ \int\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)dA = \int (U\nabla^2 V - V\nabla^2 U)\,dv$$
$$= 0$$

§ 8·15. ஒரு சமதளத்திலுள்ள பரப்பிற்குப் பயன்படுத்தப் பெறும் கிரீனின் தேற்றம்

கூற்று (Statement): XOY தளத்தில் C எனும் எளிய மூடிய வளைவரையினால் அடைக்கப் பெறும் பரப்பு Rல், M, N என்ற x, yன் சார்புகள் தொடர்ச்சியானதாயும், x, yல் தொடர்ச்சியான வகைக்கெழுக் களையும் உடையனவாயின்

$$\int_C (Mdx+Ndy) = \int\int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy \text{ ஆகும்.}$$



படம் 110.

ஆயங்களுக்கு இணையான கோடு கூடியபட்சம் இரு புள்ளிகளில் மட்டும் வெட்டுவதுபோல் அமைந்த மூடிய வளைவரை Cயினை எடுத்துக் கொள் வோம். $AEBFA$ என்ற மூடிய வளை வரையினால் அடைக்கப்பெறும் பரப்பு R என்க. AEB என்ற பகுதி வளைவரையினை $y=f_1(x)$ எனும் சமன் பாடும், BFA எனும் பகுதியை $y=f_2(x)$ எனும் சமன்பாடும் குறிக்கட் டும். xன் மதிப்பு aயிலிருந்து bக்கு மாறுபடும் என்க.

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dy dx = \int_{x=a}^{b} \left\{ \int \frac{\partial M}{\partial y} dy \right\}_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} dx$$

$$= \int_{x=a}^{b} \{ M(x, y) \}_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} dx$$

$$= \int_{x=a}^{b} [M\{x, f_2(x)\} - M\{x, f_1(x)\}] dx$$

$$= \int_{x=a}^{b} \{ M(x, y_2) - M(x, y_1) \} dx \text{ என்க.}$$

$$[\text{i.e. } y_1 = f_1(x);\ y_2 = f_2(x)]$$

$$= \int_{x=a}^{b} M(x, y_2)\, dx - \int_a^b M(x, y_1)\, dx.$$

$$= -\int_b^a M(x, y_2)\, dx - \int_a^b M(x, y_1)\, dx$$

$$= -\left[\int_a^b M(x, y_2)\, dx + \int_a^b M(x, y_1)\, dx \right]$$

அதாவது முதல் தொகை AEB வழியேயும், இரண்டாவது தொகை BFA வழியேயும் காணப்படுகின்றன.

$$\therefore \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dy = -\int_C M dx$$

இதேபோன்று EAF என்ற வளைவரைப் பகுதியை $x = f_3(y)$ என்ற சமன்பாடும், EBF என்ற வளைவரைப் பகுதியை, $x = f_4(y)$ என்ற சமன்பாடும் குறிக்கட்டும். yன் மதிப்பு cயிலிருந்து d வரை மாறுபடும் என்க.

$$\therefore \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dx dy = \int_{y=c}^{d} \left\{ \int \frac{\partial N}{\partial x} dx \right\}_{x=f_3(y)}^{f_4(y)} dy$$

$$= \int_{y=c}^{d} \{ N(x_2, y) - N(x_1, y) \} dy$$

$$\{ f_3(y) = x_1$$
$$f_4(y) = x_2 \text{ எனில்}\}$$

$$= \int_c^d N(x_2, y)\,dy + \int_d^c N(x_1, y)\,dy$$

$$= \int_c N\,dy$$

$$\therefore \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx dy = \int_C M dx + N dy$$

எளிதாக இருக்கவேண்டும் என்பதற்காக, ஆயத்திற்கு இணையான நேர்கோடு மூடிய வளைவரையினை இரு புள்ளிகளில் வெட்டும் என்று கொண்டோம். இரண்டுக்கு மேற்பட்ட புள்ளிகளில் வெட்டினாலும் இத்தேற்றம் பொருந்தும். பொதுவாக C யானது முடிவுள்ள எண்ணிக்கையான கோடுகளாலானதாயினும் இத்தேற்ற முடிவு பொருந்தும்.

§ 8·16 வெக்டர் குறியீடுகளில் கிரீனின் தேற்றம்

$\overline{A} = Mi + Nj$ என்க.

$$\therefore \nabla \times \overline{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & O \end{vmatrix}$$

$$= i\left(-\frac{\partial N}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) + k\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$\therefore \nabla \times \overline{A} \cdot k = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\overline{r} = xi + yj; \quad d\overline{r} = dxi + dyj$$

$$M dx + N dy = (Mi + Nj) \cdot (dxi + dyj)$$

$$= \overline{A} \cdot d\overline{r}$$

$\therefore$ கிரீனின் தேற்றம்

$$\int_C (M dx + N dx) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx dy$$

i.e. $$\int_C \overline{A} \cdot d\overline{r} = \int_R \nabla \times \overline{A} \cdot k\, dA$$

($dA = dx dy$ நுண் பரப்பு)

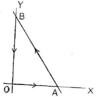
எடுத்துக்காட்டு : $\int \{(3x^2-8y^2)\,dx+(4y-6xy)\,dy\}$ என்ற தொகையை $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ என்ற நேர்கோடுகளால் அடைபடும் பகுதியில் கண்டு கிரீனின் தேற்றத்தினைச் சரிபார்.

$x+y=1$ என்ற கோடு x அச்சினை $A(1,0)$லும்; y அச்சினை $B(0,1)$லும் வெட்டும்.

$\therefore \int\limits_C (Mdx+Ndy)$

$=$ Cயின் வழியான கோட்டு வழித் தொகை

$=$ (OA வழி $+$ AB வழி $+$ BO வழி) கோட்டுத் தொகைகள்.



படம் 111.

$$OA \text{ வழித் தொகை } = \int_{x=0}^{1} (3x^2-8y^2)dx+(4y-6xy)dy$$

$$= \int_{0}^{1} 3x^2 dx \quad \{\because OA\text{யில் } y=0,\ dy=0\}$$

$$= [x^3]_0^1 = 1$$

$$AB \text{ வழித் தொகை } = \int_{x=1}^{0} (3x^2-8y^2)dx+(4y-6xy)dy$$

$$= \int_{x=1}^{0} [3x^2-8(1-x)^2]dx-[4(1-x)-6x(1-x)]dx$$

$\{\because AB$யின் சமன்பாடு $x+y=1$; $\therefore dx+dy=0$. $\therefore dy=-dx\}$

$$= \int_{1}^{0} \{3x^2-8-8x^2+16x-4+4x+6x-6x^2\}dx$$

$$= \int_{1}^{0} (-11x^2+26x-12)dx$$

$$= \left[-11\frac{x^3}{3}+13x^2-12x\right]_1^0$$

$$= -\frac{11}{3} - 13 + 12$$

$$= \frac{8}{3}$$

BOவின் சமன்பாடு $x = 0$; $\therefore\ dx = 0$

$\therefore$ BOவின் வழித் தொகை $= \int_1^0 (4y - 6xy)dy$

$$= \int_1^0 4y dy = [2y^2]_1^0$$

$$= -2$$

$\therefore$ மொத்தத் தொகை $= 1 + \frac{8}{3} - 2 = \frac{5}{3}$

இனி $\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx dy$ காண்போம்.

$$M = 3x^2 - 8y^2, \qquad N = 4y - 6xy$$

$$\therefore\ \frac{\partial M}{\partial y} = -16y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -6y$$

$$\therefore\ \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = -6y + 16y = 10y$$

$$\therefore\ \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx dy = \iint_R 10y dx dy$$

xன் குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்கு y, 0லிருந்து $1 - x$ வரை மாறும். x, 0லிருந்து 1 வரை மாறும்.

$$\therefore\ \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx dy = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} 10y dx dy$$

$$= \int_0^1 5\,(y^2)_0^{1-x}\, dx$$

$$= \int_0^1 5\,(1 - x)^2\, dx$$

$$= \left\{ -5\,\frac{(1-x)^3}{3} \right\}_0^1$$

$$= \frac{5}{3}$$

எனவே $\displaystyle\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx dy = \int_C (M dx + N dy)$

என்பது நிறைவு பெறுகிறது.

§ 8·17. ஒரு எளிய மூடிய வளைவரை Cயினுல் அடைக்கப் பெறும் பரப்பு $= \frac{1}{2}\int_C (x dy - y dx)$

கிரீன் தேற்றப்படி $\displaystyle\int_C (M dx - N dy) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx dy$

இதில் $M = -y$ எனவும், $N = x$ எனவும் பிரதியிட்டால்,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$\therefore \int_C (-y dx + x dy) = \iint_R (1+1)\, dx dy$$

$$= 2\iint_R dx dy$$

$$= 2\,\{ R\text{ன் பரப்பு} \}$$

$$\therefore\ R\text{ன் பரப்பு} = \frac{1}{2}\int_C x dy - y dx$$

எடுத்துக்காட்டு 1: $x = a \cos t$; $y = b \sin t$ எனும் சமன்பாடு களால் கொடுக்கப்படும் நீள்வட்டத்தின் பரப்பினைக் கணக்கிடுக.

நீள்வட்டம் Cயினுல் அடைபடும் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}\int_C x dy - y dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t=0}^{2\pi} \left\{ (a \cos t\ b \cos t\ dt) + (b \sin t\ a \sin t)\ dt \right\}$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt$$

$$= \frac{ab}{2}\int_{o}^{2\pi} dt$$

$$= \frac{ab}{2}\, 2\pi = \pi ab$$

எடுத்துக்காட்டு 2 : $\int_C \varphi d\overline{r} = \iint_S \hat{n} \nabla \varphi dA$ என நிறுவுக.

$\overline{F} = \overline{a}\,\varphi$ எனவும், $\overline{a}$ என்பது விருப்பிற்கேற்ப எடுக்கப்பட்ட மாறிலி வெக்டர் எனவும், φ தொடர்ச்சியான வகையிடத் தக்க திசையிலிப் புள்ளிச் சார்பு எனவும் கொள்க.

$$\therefore \int_C \overline{a}\varphi \cdot d\overline{r} = \iint_S \nabla \times (\overline{a}\,\varphi) \cdot \hat{n}\, dA$$

$$\nabla \times (\overline{a}\,\varphi) = \varphi \nabla \times \overline{a} + \nabla \varphi \times \overline{a}$$

$$= \nabla \varphi \times \overline{a} \quad \{\because \nabla \times \overline{a} = 0\}$$

ஸ்டோக் தேற்றப்படி $\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r} = \iint_S (\nabla \times \overline{F}) \cdot \hat{n} dA$

$$\therefore \int_C \overline{a}\varphi \cdot d\overline{r} = \iint_S \nabla \times (a\varphi) \cdot \hat{n} dA$$

$$= \iint_S \nabla \varphi \times \overline{a} \cdot \hat{n} dA$$

$$= -\iint_S a \times \nabla \varphi \cdot \hat{n} dA$$

$$\text{i.e. } \overline{a} \cdot \int_C \varphi d\overline{r} = -\overline{a} \cdot \iint_S \nabla \varphi \times \hat{n} dA$$

இது $\overline{a}$யின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பொருந்தும். எனவே $\overline{a}$யினை நீக்கிவிட்டால்,

$$\int_C \varphi d\overline{r} = -\iint \nabla \varphi \times \hat{n} dA$$

எடுத்துக்காட்டு 3 : $\int_C d\overline{r} \times \overline{F} = \iint_S (\hat{n} \times \nabla) \times \overline{F} dA$ என நிறுவுக.

$\overline{f} = \overline{a} \times \overline{F}$ எனவும், $\overline{a}$ என்பது மாறிலியான ஏதோ ஒரு வெக்டர் எனவும் கொள்க. ஸ்டோக் தேற்றப்படி

$$\therefore \int_C \overline{a} \times \overline{F} \cdot d\overline{r} = \iint_S \nabla \times (\overline{a} \times \overline{F}) \cdot \hat{n} dA$$

ஆனால் $\nabla\times(\overline{a}\times\overline{F}) = \overline{a}\nabla\cdot\overline{F}-\overline{F}\nabla\cdot\overline{a}+(\overline{F}\cdot\nabla)\overline{a}-(\overline{a}\cdot\nabla)\overline{F}$

$$= \overline{a}\,(\nabla\cdot\overline{F}) - (\overline{a}\cdot\nabla)\overline{F}$$

மேலும் $\{(\overline{a}\cdot\nabla)\overline{F}\}\cdot\hat{n} = (\overline{a}\cdot\nabla)(\overline{F}\cdot\hat{n})$

எனவே $\int_C \overline{a}\cdot\overline{F}\times d\overline{r} = \iint_S \{(\nabla\cdot F)\,\overline{a}\cdot\hat{n}-\overline{a}\cdot\nabla(\overline{F}\cdot\hat{n})\}dA$

$$= \overline{a}\cdot\iint_S \}(\nabla\cdot\overline{F})\,\hat{n} - \nabla(\overline{F}\cdot\hat{n}\}\,dA$$

$$= -\,\overline{a}\cdot\{\iint_S(\hat{n}\times\nabla)\times\overline{F}dA|\}$$

$$\therefore\ \overline{a}\cdot\left[\int_C\overline{F}\times d\overline{r}+\iint_S(\hat{n}\times\nabla)\times\overline{F}dA\right]=0$$

இது $\overline{a}$யின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் பொருந்துமாகையால்,

$$\int_C\overline{F}\times d\overline{r}+\iint_S(\hat{n}\times\nabla)\times\overline{F}dA=0$$

i.e. $$\int_C d\overline{r}\times\overline{F} = \iint_S(\hat{n}\times\nabla)\times\overline{F}dA$$

பயிற்சி 8

1. $\overline{F}=(2x-y)\,i-yz^2j-y^2zk$ என்ற சார்புக்கு $x^2+y^2+z^2=1$ என்ற கோளத்தின் மேல் அரைப்பகுதிக்கு ஸ்டோக் தேற்றம் பொருந்து கிறதா என்று பரிசோதித்துப் பார்.

2. $\overline{F}=x^2i+xyj$ என்ற சார்புக்கு $x=0;\ y=0;\ x=a;\ y=a;$ என்ற கோடுகளால் அடைபடும் சதுரத்தின் பகுதியில் ஸ்டோக்கின் தேற்றம் பொருந்துகிறதா என்று ஆராய்க.

3. $\overline{F}=(x^2-y^2)i+2xyj$, என்ற சார்புக்கு $x=0,\ x=a;\ y=0;$ $y=b$ என்ற செவ்வகப் பகுதியில் ஸ்டோக் தேற்றம் பொருந்துகிறதா எனக் கண்டுபிடி.

4. $\overline{F}=(y-z+2)i+(yz+4)j-xzk$; என்ற சார்புக்கு $x=0;$ $y=0;\ z=0;\ x=2,\ y=2,\ z=2;$ என்ற கனசதுரப் பகுதிக்கு ஸ்டோக் கின் தேற்றத்தினைப் பரிசோதிக்கவும்.

5. ஓரலகு ஆரமுடைய கோளம் ஒன்றின் மேல்பாதிப் பரப்பில், பரப்புக்குச் செங்கோட்டுவழி $\overline{F}=(x+y)\,i+(y-x)\,j+z^3k$யின் கூறின் பரப்புவழித் தொகை காண்க.

6. $\overline{F}=xyi+yzj+x^2k$; எனும் சார்புக்கு xy தளத்தில் உள்ள பரப்பு மட்டுமில்லாத ஓரலகு கனசதுரப் பரப்பின் மீது ஸ்டோக்கின் தேற்றத்தினைச் சரிபார்.

7. $\overline{F}=x^2i+zj+yzk$ எனும் சார்புக்கு ஓரலகு கனசதுரத்தின் மீது பாய்வுத் தேற்றத்தினைச் சரிபார்.

8. $\overline{F}=yi+xj+z^2k$ என்ற சார்புக்கு $x^2+y^2=a^2$ $z=0$; $z=h$ என்ற உருளையினால் (cylinder) மூடப்பெறும் பகுதிக்குப் பாய்வுத் தேற்றத்தினைச் சரி பார்க்க.

9. V என்ற கன அளவு கொண்ட S எனும் மூடிய வளைதளப் பரப்பில் $\overline{F}=axi+byj+czk$ என்ற சார்புக்கு

$$\iint_S \overline{F} \cdot \hat{n}\, dA = (a+b+c)\, V$$ எனக் காண்பி.

10. S எனும் மூடிய வளைதளப் பரப்பிற்கு $\iint_S \overline{r} \cdot \hat{n} dS$ன் மதிப்புக் காண்க.

11. V என்ற கன அளவைக் கொண்ட S எனும் மூடிய வளைதளப் பரப்புக்கு $\overline{F}=xi+2yj+3zk$ எனும் சார்புக்கு $\iint \overline{F} \cdot \hat{n} dS = 6V$ எனக் காண்பி.

12. $$\iiint_V \frac{dV}{r^2} = \iint_S \frac{\overline{r} \cdot \overline{n}\, dS}{r^2}$$ எனக் காண்பி.

13. $\overline{F}=$ சுழல் $\overline{V}$ எனில் $\iint_S \overline{F} \cdot \hat{n}\, dS = 0$ எனக் காட்டு.

14. (0, 0, 0) மையமும் ஆரம் 2ம் உடைய கோளம் Sக்கு $\iint_S \overline{r} \cdot \overline{n}\, ds$ ன் மதிப்பைக் காண்க.

15. $x=-1,\ y=-1,\ z=-1,\ x=1,\ y=1,\ z=1$, என்ற கன சதுரத்திற்கு $\iint_S \overline{r} \cdot \hat{n}\, dA$ன் மதிப்பைக் காண்க.

16. $x^2+y^2+z^2=a^2$ என்ற கோளத்தின் மேற்பாதிப் பரப்புக்கு $\overline{F}=2xzi+yzj+z^2k$ என்ற சார்புக்கு பாய்வுத் தேற்றத்தினைச் சரிபார்.

17. $\overline{F}=2xyi+yz^2j+zxk$ என்ற சார்புக்கு $x=0,\ y=0,\ z=0$; $x=2,\ y=1,\ z=3$ என்ற செவ்வகத் திண்மத்திற்கு $\iint_S \overline{F} \cdot \overline{n}\, dA$ன் மதிப்பைக் காண்க.

18. (i) ஆதியில் மையமும் பக்க நீளம் aயும் உடைய கனசதுரத்தின் புறப்பரப்பின் மீது $\overline{A}=(x^2-y^2)\,i+2xyj+(y^2-xy)\,k$ என்ற வெக்டருக்கு $\iint \overline{A} \cdot ds$ என்ற மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $\iiint$ பாய்வு $\overline{A}\,dv$ என்பதன் மதிப்பை அக்கனசதுரத்தின் கனஅளவு முழுவதிலும் கண்டுபிடி. இவ்விரண்டு முடிவுகளையும் பாய்வுத் தேற்றப்படிச் சரிபார்.

19. $\overline{A} = (2xy+z)\,i + y^2 j - (x+3y)\,k$ என்ற வெக்டருக்கு $2x+2y+z = 6$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ எனும் தளங்களால் மூடப்பெற்ற பகுதிக்குப் பாய்வுத் தேற்றத்தினைச் சரிபார்.

20. காஸின் பாய்வுத் தேற்றத்தினை $\overline{F} = (x^3 - yz)\,i - 2x^2 yj + 2k$ என்ற சார்புக்கு $x = 0$; $x = a$; $y = 0$; $y = a$; $z = 0$; $z = a$; என்ற கனசதுரம் பக்கப்பரப்புகளின் மீது சரிபார்க்கவும்.

21. $\overline{A} = xi - yj + (z^2-1)\,k$ எனில் $z = 0$; $z = 1$; $x^2+y^2 = 4$ என்ற பகுதியில் $\int\limits_S \hat{n} \cdot \hat{A}\, ds$ எனும் தொகை காண்க.

22. $\int\limits_S (axi + byj + czk) \cdot \hat{n}\, dA$ எனும் தொகையை $S \equiv x^2+y^2+z^2-1 = 0$ என்ற கோளப்பரப்பில் காண்க.

23. $\int\limits_S (xi+yj+zk) \cdot \hat{n}\, dA$ எனும் தொகையை $x^2+y^2 = z^2$; $z = 1$ என்ற கூம்பின் பகுதியில் காண்க.

24. $\int\limits_C \{(3x^2 - 8y^2)\,dx + (4y - 6xy)\,dy\}$ எனும் தொகையை $y = \sqrt{x}$; $y = x^2$ எனும் வளைவரைகளால் அடைக்கப்பெறும் பகுதியில் தொகை கண்டு கிரீனின் தேற்றத்தினைச் சரிபார்.

விடைகள்

பயிற்சி 1

(7) $\overline{AC}=\overline{\alpha}+3\overline{\beta}$; $\overline{DB}=3\overline{\beta}-\overline{\alpha}$; $\overline{BC}=2\overline{\alpha}+2\overline{\beta}$; $\overline{CA}=-\overline{\alpha}-3\overline{\beta}$.

(8) Cயின் நிலைவெக்டர் $3\overline{b}-2\overline{a}$; Dயின் நிலைவெக்டர் $2\overline{a}-\overline{b}$.

(12) $\overline{AC}=2\overline{a}+2\overline{b}$; $\overline{BC}=3\overline{a}+\overline{b}$; $\overline{DB}=4\overline{b}-2\overline{a}$; $\overline{DA}=-\overline{a}+3\overline{b}$.

(18) ABயின் திசைக் கொசைன்கள் $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$.

(24) (i) $\frac{7}{2}(\overline{a}-\overline{b}+\overline{c})+(\overline{b}+\overline{c}-\overline{a})-\frac{1}{2}(\overline{c}+\overline{a}+\overline{b})=2\overline{a}-3\overline{b}+4\overline{c}$

(ii) $-8(\overline{a}-2\overline{b}+\overline{c})+6(-\overline{b}+2\overline{c}+\overline{a})-3(\overline{c}-\overline{a}+3\overline{b})=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$

(43) $3\,\overline{AD}$ (53) சார்புத் திசைவேகம் $5i-12j$

(54) $\left(6+\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)i+\frac{5}{2}j$.

பயிற்சி 2

(1) (i) $\sqrt{14}$, (ii) $\sqrt{5}$, (iii) $\sqrt{77}$

(2) (i) $\cos\theta=0$; $\theta=\frac{\pi}{2}$ (ii) $\cos^{-1}\left\{\frac{8\sqrt{29}}{145}\right\}$

(iii) $\cos^{-1}\left\{\frac{-5\sqrt{87}}{87}\right\}$ (iv) $\cos^{-1}\left\{\frac{-5}{\sqrt{77}\sqrt{122}}\right\}$

(3) $|\overline{a}|=\sqrt{14}$; $|\overline{b}|=\sqrt{13}$ $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$ $\therefore\ \overline{a}\perp\overline{b}$

(4) (i) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$ (iii) $\cos^{-1}(\frac{47}{50})$

(5) $|\overline{a}|=\sqrt{3}$; $|\overline{b}|=\sqrt{74}$; $|\overline{c}|=\sqrt{102}$; $|\overline{a}+\overline{b}|=\sqrt{105}$

$|\overline{b}-2\overline{c}|=\sqrt{766}$; $|\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}|=\sqrt{273}$; $|\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}|=\sqrt{45}$.

$\overline{a}$க்கும் $\overline{b}$க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் $\cos^{-1}\left\{\frac{14}{\sqrt{3}\sqrt{74}}\right\}$

$\overline{b}$க்கும் $\overline{c}$க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் $\cos^{-1}\left\{\frac{-71}{\sqrt{74}\sqrt{102}}\right\}$

$\overline{c}$க்கும் $\overline{a}$க்கும் இடைப்பட்ட கோணம் $\cos^{-1}\left\{\frac{-10}{\sqrt{3}\sqrt{102}}\right\}$

(6) (i) $\frac{-i-j+k}{\sqrt{3}}$; (ii) $\frac{-3i+j-2k}{\sqrt{14}}$; (iii) $\frac{-i+2j+k}{\sqrt{6}}$;

(iv) $\frac{-i+k}{\sqrt{2}}$; (v) $\frac{7i-6j-k}{\sqrt{86}}$; (vi) $\frac{-17i+22j+7k}{\sqrt{822}}$.

(7) $AB=\sqrt{26}$; $BC=\sqrt{14}$; $AC=\sqrt{6}$; $\cos A = \frac{9}{\sqrt{156}}$;

$\cos B = \frac{17}{\sqrt{14\times 26}}$; $\cos C = \frac{-3}{\sqrt{84}}$.

(9) $2i-3k$; $2i-\frac{13}{3}j+\frac{4}{3}k$; $\frac{21}{2}i+7j+7k$.

(10) $i+j$; $i-j-2k$; $4i+2k$;

(12) $2i-2j+k$. (13) $9.2i-3.9j-.8k$ அல்லது $-6i-7.1j-4.3k$.

(16) $AB=\sqrt{41}$; $AC=\sqrt{35}$; $BC=\sqrt{6}$ மிகக்குறைந்த கோணம் $\angle A = \cos^{-1}\sqrt{\frac{35}{41}}$. (17) $\sqrt{41}$; $\sqrt{55}$; $\sqrt{6}$.

(18) $\cos\theta = \frac{38}{\sqrt{29}\sqrt{50}}$. (23) $l=2$; $m=-5$;

(24) . 89 அலகுகள். (26) 175 அலகுகள்.

பயிற்சி 3

(1) $-14i-34j-22k$; (2) $\frac{\sqrt{209}}{2}$. (3) $\frac{\sqrt{310}}{2}$; (4) $\sqrt{696}$;

(5) $\frac{13i-2j+4k}{\sqrt{189}}$. (7) $-29i+13j-7k$. (8) $9i+21j-3k$.

(10) $\sin\theta = \frac{\sqrt{195}}{\sqrt{26}\sqrt{66}}$.

(11) $\sqrt{\frac{1473}{26}}$; (12) $\sqrt{\frac{2953}{61}}$; (13) 7

(14) $\frac{102}{11}(-2, 3, 0)$; $(-\frac{204}{11}, \frac{306}{11}, 0)$

(15) $-3i-j+15k$; $-1, 1, 5$ (16) $-24i-13j+7k$.

பயிற்சி 4

(1) (i) 97; (ii) +14; (iii) 12; (iv) 361; (2) 75; −75

(3) $[UVW]=18$; $[UWV]=-18$; $[VUW]=-18$; $[VWU)=18$.

(5) $l=\pm 2$ (7) $-32i-12j-24k$ (14) 12 (15) $-118i+98j-344k$

பயிற்சி 5

(1) $\bar{r}=(0, 2, 3)+t(2, -7, -13)$; $46x+15y-z=27$

(2) $\bar{r}=t\,(59, -5, 19)$ (5) $1, \frac{16}{7}$

(6) $\overline{r}\cdot(25, 17, 62)=78$; $\overline{r}\cdot(1, 35, -10)=156$

(7) $2+2\dfrac{q-\overline{a}\cdot\overline{n}}{n^2}\overline{n}$; $\overline{r}=a+2\dfrac{q-\overline{a}\cdot\overline{n}}{n^2}\overline{n}+t\left(\overline{b}-\dfrac{2\overline{b}\cdot\overline{n}}{n^2}\overline{n}\right)$

(8) $2\overline{b}-\overline{a}+2\dfrac{(\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c}}{c^2}\overline{c}$.

(9) $(-3, 5, 2)$ (12) $[\overline{r}-\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}]=0$;

(13) $[\overline{r}-\overline{a};\ \overline{a}-\overline{c};\ \overline{b}]=0$ (15) $\overline{c}+\dfrac{\overline{d}}{\overline{d}\cdot\overline{n}}(p-\overline{c}\cdot\overline{n})$

(16) 11; (18) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$; $11x+2y-72+6=0=7x+y-5z+7$

(21) $3\sqrt{30}$; $4x-5y-17z+79=0=22x-5y+19z-83$

(22) $\dfrac{11}{3\sqrt{38}}$; $10x-29y+16z=0=13x+82y+55z-109$

(24) $\overline{r}=\overline{c}+t\{b\times(a-\overline{c})\}\times\overline{b}\times(\overline{a}^1-\overline{c})\}$

(28) $\overline{r}=(-5i+7j+3k)+t(3i-j+4k)$

(29) $\overline{r}=3i+6j-5k+t(2i+9j-12k)$

(31) $\overline{r}=(-5i+2j+3k)+t(9i-5j+3k)$

(34) $7\overline{a}+3\overline{c}$; (35) $2\overline{a}+3\overline{b}-4\overline{c}$

(41) $\overline{r}=(7, 5, -2)+t(7, -3, 5)+s(1, 1, 1)$

(42) $\overline{r}=(2, -5, 1)+t(1, 4, -1)+s(2, 4, 1)$

(43) $\overline{r}=(1, -2, -1)+t(1, 5, 2)$
$\overline{r}=3, 1, 1)+t(-1, 0, -4)+s(1, 0, 0)$

(48) $\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$; (49) $(\overline{r}-2i-3j+k)\cdot(3i+4j+7k)=0$

(50) $(\overline{r}+3i-j-6k)\cdot(6i-6j+3k)=0$

(59) $(\overline{r}-\overline{e})\cdot(\overline{r}-\overline{f})=0$

(60) $(\overline{r}-\overline{c})^2=k^2$ இதில் $\overline{c}$ என்பது மையம் $\left\{\dfrac{a}{6}(3-\sqrt{3})(i+j+k)\right\}$

பயிற்சி 6

(1) $\dfrac{\sqrt{1349}}{2}$	(2) $\dfrac{\sqrt{18235}}{2}$	(3) $\sqrt{3811}$	(4) $3\sqrt{6}$
(5) $\sqrt{114}$	(6) $\sqrt{1572}$	(7) $2\sqrt{318}$	(8) $9\sqrt{3}$
(11) $\sqrt{1617}$	(12) $\sqrt{2426}$	(13) $-\frac{34}{3}$	(17) 746
(18) 27	(19) 155		

பயிற்சி 7 — (1)

(1) (i) $\dot{\bar{r}} = i \sin t + (1-\cos t)\, j$; $\ddot{\bar{r}} = i \cos t + \sin t j$.

(ii) $\dot{\bar{r}} = 3t^2 i + (2t+5^4 t)\, j - k \sin t$.

$\ddot{\bar{r}} = 6ti + (2+20t^3)\, j - k \cos t$.

(iii) $\dot{\bar{r}} = -6tj + 14k$; $\ddot{\bar{r}} = -6j$.

(2) $\dot{\bar{r}} = 2k$; $\ddot{\bar{r}} = 2i$.

(3) (i) $r^n \dfrac{d\bar{r}}{dt} + nr^{n-1} \dfrac{dr}{dt} \bar{r}$. (ii) $2r \dfrac{dr}{dt} \bar{r} + r^2 \dfrac{d\bar{r}}{dt} + \bar{b} \left\{ \bar{a} \cdot \dfrac{d\bar{r}}{dt} \right\}$

(iii) $2r \dfrac{dr}{dt} \bar{r} + \dfrac{d\bar{r}}{dt} r^2 + \bar{b} \times \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$.

(4) (i) $\dfrac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{A}$; (ii) $\dfrac{d\bar{r}}{dt} \cdot \bar{A}$; (iii) $\dfrac{d\bar{r}}{dt} \cdot \dot{\bar{r}} + \bar{r} \cdot \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$;

(iv) $\dfrac{d\bar{r}}{dt} \times \dot{\bar{r}} + \bar{r} \times \ddot{\bar{r}}$.

(5) (i) $\dfrac{r \dfrac{dr}{dt} - \bar{r}\, 2 \dfrac{dr}{dt}}{r^3} + \dfrac{(\bar{a} \cdot \bar{r}) \bar{b} \dfrac{d\bar{r}}{dt} - r\bar{b} \left(\bar{a} \cdot \dfrac{d\bar{r}}{dt} \right)}{(\bar{a} \cdot \bar{r})^2}$

(ii) $\dfrac{(\bar{r}^2 + \bar{a}^2) \dfrac{d\bar{r}}{dt} - (\bar{r} + \bar{a})\, 2\bar{r} \cdot \dfrac{d\bar{r}}{dt}}{(\bar{r}^2 + \bar{a}^2)^2}$

(iii) $\dfrac{(\bar{r} \cdot \bar{a}) \left\{ \dfrac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{a} \right\} - (\bar{r} \times \bar{a})(\dot{\bar{r}} \cdot \bar{a})}{(\bar{r} \cdot \bar{a})^2}$

(7) $\dfrac{d\bar{F}}{dt} = \dfrac{1}{r} \dfrac{d\bar{r}}{dt} - \dfrac{\bar{r}}{r^2} \dfrac{dr}{dt}$. $\bar{F} \times \dfrac{d\bar{F}}{dt} = \dfrac{\bar{r}}{r^2} \times \dfrac{d\bar{r}}{dt}$.

(8) $\dfrac{d\bar{r}}{dt} = \dfrac{2}{3} i + \dfrac{4}{3} j$; $\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} (5i + 4j)$

(9) திசைவேகம் $= 10$, முடுக்கம் $= 18$

(10) (i) திசைவேகம் $= \sqrt{11}$, முடுக்கம் $= \dfrac{8}{\sqrt{11}}$

(11) $\dfrac{d\bar{r}}{dt} = -i + 3bk$, $\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} = i - 9\, aj$

(12) (a) $(5t^2-1) \cos t + 11t \sin t$

(b) $(t^3 \sin t - 3t^2 \cos t)\, i - (t^3 \cos t + 3t^2 \sin t)\, j +$
$(5t^2 \sin t - \sin t - 11t \cos t)\, k$ (c) $100t^3 + 2t + 6t^5$

(14) $7i+6j-6k$

(15) (i) $i\,(2\,xyz)+j\,(x^2z)+k\,(x^2y)$

(ii) $i\,(y^2z)+j\,(2\,xyz)+k\,(xy^2)$

(iii) $i\,(yz)+zx\,j+xyk$ (iv) $2\,xi+2\,yj+2\,zk$

(v) $2\,(x^2+y^2+z^2)\;\;[2\,xi+2\,yj+2\,zk]$

(vi) $\dfrac{1}{2\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\;\;[2\,xi+2\,yj+2\,zk]$

(vii) $\dfrac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\;\;[xi+yj+zk]$

(viii) $\dfrac{2\,(xi+yj+zk)}{(x^2+y^2+z^2)}$

(ix) $(3x^2-3yz)\,i+(3y^2-3zx)\,j+(3z^2-3xy)\,k$

(16) (i) $4i+9j-24k$, (ii) $16i-428j-864k$

(iii) $-2i+33j-24k$

(17) (i) $\dfrac{4i+3j+4k}{\sqrt{41}}$ (ii) $\dfrac{10i-16j-4k}{\sqrt{372}}$ (iii) $\dfrac{i+3j+k}{\sqrt{11}}$

(iv) $\dfrac{2i-4j-k}{\sqrt{21}}$ (v) $\dfrac{-i-4j+2k}{\sqrt{21}}$ (vi) $\dfrac{4i+j+k}{3\sqrt{2}}$

(18) $4\sqrt{29}$ (19) $2i+2j+2k\,;\;2\sqrt{3}$

(20) $\dfrac{46}{5\sqrt{2}}$; (21) $\dfrac{-11}{3}$; (22) $\dfrac{52}{5\sqrt{2}}$; (23) $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{22}}\right)$

(24) $\cos^{-1}\left(\dfrac{8}{3\sqrt{21}}\right)$ (25) $\dfrac{28}{\sqrt{21}}$ (26) $\dfrac{18}{7^4}$

(27) $\dfrac{8}{\sqrt{6}}$ (28) $-j\,;\;-\frac{1}{2}$ (29) $\dfrac{2i+j-k}{\sqrt{6}}$

(30) $\varphi=xy^2-x^2yz^3+3y+\dfrac{3z^4}{2}+K$ (K ஒரு மாறிலி)

(31) $\varphi=x^2yz^3+20$ (32) 25 ; $-56i+30j-47k$

பயிற்சி 7—(2)

(1) 0 (2) 0 (3) சுழல் $F=-y^2i-z^2j-x^2k$

சுழல் (சுழல் F) $=2zi+2xj+2yk$

(4) (i) $2x+2y+2z$; 0

(ii) $\cos z+\log x-2z\,;\;-x\sin zj+\dfrac{y}{x}k$

(iii) $yz+3x^2+(2xz-y^2)\,;\;-2yzi+(xy-z^2)j+(6xy-xz)k$

(iv) 0; $2i+4j+6k$; (v) $yz+z^3x+x^2y$;
$(x^2z-2xyz)i+(xy-2xyz)j+(yz^2-xz)k$

(vi) $6(x+y+z)$; 0 (vii) 0; 0

(5) (i) 6; 0 (ii) 10; $-2i-3j-2k$

(iii) 5; $-3i-2j+k$ (iv) $2i+4j+6k$ (v) $\frac{2}{3}$, 0

(6) -42 (9) $a=-2$; (15) $f=(2y+3z)e^x+c$

(16) $f(r)=\frac{A}{r^3}$ (19) $a=4$ (20) $3(x^3+y^3+z^3-3xyz)$

(26) $\nabla \cdot \overline{F}=\cos z+\log x-2z$, $\nabla\times\overline{F}=-x\sin zj+\frac{y}{x}k$

(27) $\frac{\pi}{2}$ (31) $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dt}(r^2f)$ (32) $3j+4k$

பயிற்சி 8

(5) -2π (10) 3 (சன் கன அளவு)

(14) 32π (15) 24 (17) 30 (18) (i) 0; (ii) 0 (21) 4π

(22) $(a+b+c)\frac{4\pi}{3}$ (23) $\frac{7\pi}{6}$

துணை நூல்களின் பட்டியல்
(List of Books for reference)

1. 'Elementary Vector Analysis'

—*by C. E. Weatherburn*

—E.L.B.S. & G. Bell and Sons—London—1962

2. 'Advanced Vector Analysis'

—*by C. E. Weatherburn*

—G. Bell and Sons—London—1962

3. 'Principles of Mechanics'

—*by Synge and Griffith*

—Mcgraw Hill Book Company

4. 'Advanced Calculus'

—*by Sokolnikoff*

—Mcgraw Hill Book Company

5. 'A Text Book of Vector Algebra'

—*by Shantinarayan*

—S. Chand & Co.—Madras

6. 'A Text Book of Vector Calculus'

—*by Shantinarayan*

—S. Chand & Co.—Madras

கலைச்சொற்கள்

Associative law — தொகுப்பு விதி ; சேர்ப்பு விதி
Binormal — இருமைச் செங்கோடு
Centre of Mass — பொருண்மை மையம்
Centroid — சராசரி மையம்
Collinear — ஒரே கோட்டமைவுடைய
Commutative law — மாற்று விதி
Conjugate points — துணையிய புள்ளிகள்
Conservative vector field — காப்பு நிலைவெக்டர் களம்
Coplanar — ஒரேதள அமைவுடைய
Curl — சுழல்
Directional Derivative — திசைவகைக் கெழு
Distributive law — பங்கீட்டு விதி
Divergence — பாய்வு
Equipotential Surface — சமமான நிலைச்சக்தி உடைய தளம்
Field — களம்
Field Scalar — திசையிலிக் களம்
Field Vector — வெக்டர் களம்
Fluid — அரை நீர்மம் ; பாய்பொருள்
Higher order — உயர் வரிசை
Initial point — ஆரம்பப் புள்ளி
Integral — தொகை
Integral definite — வரையறுத்த தொகை
Integral indefinite — தேராத் தொகை ; வரையறாத் தொகை
Integral line — கோட்டு வழித்தொகை

Integral Surface	—	பரப்பு வழித்தொகை
Integral tangential line	—	தொடுகோட்டு வழித்தொகை
Integral volume	—	கன வழித்தொகை
Irrotational	—	சுழற்சியில்லா
Level Surface	—	மட்டதளம்
Locus	—	இயங்குவரை
Mean centre	—	சராசரி மையம்
Mean centre weighted	—	நிறையிட்ட சராசரி மையம்
Modulus	—	எண் அளவு
Normal	—	செங்கோடு
Normal form	—	செங்கோட்டு அமைப்பு
Order	—	வரிசை
Parallelopiped	—	இணைகரத் திண்மம்
Parameter	—	துணையலகு, துணைமாறி
Physics	—	பௌதிகவியல் ; இயற்பியல்
Polar plane	—	இசைத்தளம்
Polyhedral Surface	—	பன்முகத்திண்மம்
Primitive	—	முதற் சார்பு
Principal normal	—	முதன்மைச் செங்கோடு
Quantity	—	கணியம்
Resultant	—	விளைவு ; இணைவாக்க விளைவு
Scalar	—	திசையிலி
Scalar triple product	—	திசையிலி முப்பெருக்கம்
Shortest distance	—	மிகச்சிறு தூரம் ; மிகக்குறைந்த தூரம்
Skew	—	ஒரே தளத்திலில்லாத
Solenoidal field	—	சுருள் உருளைக்களம்
Space	—	வெளி
Space three dimensional	—	மூவளவை வெளி
Support	—	தாங்கும் கோடு ; தாங்கி
Terminus	—	முடிவுப் புள்ளி
Tetrahedron	—	நான்முகி
Trihedral angle	—	மும்முகக் கோணம்
Vector	—	திசையி ; வெக்டர்

Vector equal — சமமான வெக்டர்
Vector Free — கட்டிலா வெக்டர்
Vector like — ஒத்த வெக்டர்
Vector localised — அறுதியிட்ட வெக்டர்
Vector negative — எதிர்மறை வெக்டர்
Vector position — நிலைவெக்டர்
Vector reciprocal — தலைகீழ் வெக்டர்
Vector Unit — ஓரலகு வெக்டர்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை.

1971 ஜூலை வரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

பொருளாதாரம்

			ரூ.	காசு
*1.	பொருளாதாரம்—I ...	சி. வேலாயுதம் ...	6	50
*1-A	,, II ...	,, ...	9	00
*2.	சோவியத் பொருளாதார வளர்ச்சி ...	டாக்டர் எம். ஜே. கே. தவராஜ் ...	4	25
*3.	அமெரிக்கப் பொருளாதாரம் ...	,, ...	4	50
*4.	பொருளாதாரச் சிந்தனை வரலாறு ...	சோணாசலம் ...	7	00
*5.	பன்னாட்டு வாணிபம் ...	மு. ஆரோக்கியசாமி ...	6	00
6.	புதுமைப் பொருளாதாரக் கூறுகள் ...	திருமதி ஆர். தாமரஜாட்சி ...	12	00
7.	பொருளாதாரம் ஓர் அறிமுகம்—I ...	தி. சி. மோகன் ...	12	00
8.	,, II ...	எம். ஏ. அபூர்வசாமி, பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன் ...	10	75
9.	பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு ...	க. முத்தையன் ...	7	00
*10.	பணவியலும் பாங்கியலும்—I ...	சி. வேலாயுதம் ...	6	75
*11.	,, II ...	,, ...	11	50
12.	நவீன பாங்கு இயல் ...	க. வெற்றிவேல் ...	5	00
*13.	இந்தியச் செலாவணியும் பாங்கு முறையும் ...	பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன் ...	5	50
*14.	அரசாங்க நிதி இயல் ...	அர. சேஷாசலம் ...	4	75

* மூல நூல் (Original Book)

பொருளாதாரம்—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
15.	இந்தியப் பொருளியல்—I	எம். பாலசுப்பிரமணியன்	10	00
16.	,, II	எம். லூர்துநாதன்	4	25
17.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை—I	சி. சுந்தரராஜன்	10	75
18.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	10	50
19.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு—I	கீ. சீ. இராமசாமி	6	00
20.	,, II	,,	6	00
21.	அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதார வளர்ச்சி	தி. சி. மோகன்	5	00
22.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—I	மு. க. சுப்பிரமணியம்	11	00
23.	,, II	பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	6	00
24.	,, III	,,	6	50
25.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்—I	மா. குமாரசாமி	10	00
26.	,, II	அர. சேஷாசலம்	9	50
27.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி—I	தே. வேலப்பன்	10	00
28.	,, II	ஜி. சிதம்பரம்	8	00
29.	பணம்—சிறு விளக்கம்	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	10	00
*30.	வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	கு. ஆளுடையபிள்ளை	9	50
31.	பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில்-வாணிகப் புரட்சி	சு. ரா. கருப்பண்ணன்	11	00
32.	பென்ஹாம் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	11	00
33.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	7	00
*34.	வரவு செலவுத் திட்டம்	ஆர். ரங்காச்சாரி	6	00
35.	பன்னாட்டுப் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	7	50
36.	,, II	கே. எஸ். இராமசாமி	9	00

37.	பொருளாதார ஆய்வு நூல்—I	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	7	75
38.	,, II	,,	7	00
39.	வளர்ச்சியுறுத நாடுகளின் அரசாங்க நிதியியல்	க. வெற்றிவேல்	4	25
40.	வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளின் முதலாக்கம் பற்றிய சிக்கல்கள்	மா. குமாரசாமி	5	50
41.	1939 முதல் இந்தியாவில் பணவீக்க விலைப் போக்குகள்	சி. சுந்தரராஜன்	7	50
42.	பொருளாதார வளர்ச்சிபற்றிய கட்டுரைகள்	எம். கே. சுப்பிரமணியம்	7	75
43.	இந்தியப் பொருளாதார வரலாறு (1857—1956)—I	ம. திருநாவுக்கரசு	7	00
44.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்	பு. வி. சீனிவாசன்	6	25

வரலாறு

*45.	பிரிட்டன் வரலாறு—I	கி. ர. அனுமந்தன்	4	50
*46.	,, II	,,	3	50
*47.	,, III	,,	7	25
*48.	ஐரோப்பிய வரலாறு—I (கி.பி. 395—1500)	டி. வி. சொக்கப்பா	3	75
*49.	,, II (கி.பி. 1500 முதல்)	என். ஜே. இராஜகோபால்	5	50
50.	ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்து நூற்றுண்டுகாலச் சரித்திரம்	வை. விருத்தகிரீசன்	9	50
51.	இங்கிலாந்து வரலாறு—I	இரா. அண்ணாமலை	13	00
52.	,, II	பா. மாணிக்கவேலு	13	00
53.	,, III	என். ஜே. இராஜகோபால்	8	00
54.	,, IV	,,	8	00

* மூல நூல் (Original Book)

வரலாறு—(தொடர்ச்சி)

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	காசு
55.	இங்கிலாந்தின் வரலாறு—I	க. த. திருநாவுக்கரசு	15	00
56.	,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா	8	00
57.	,, III	,,	5	00
58.	இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	7	50
59.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	6	00
60.	,, III	அ. பாண்டுரங்கன்	7	25
61.	கிரேக்கநாட்டு வரலாறு—I	சைமன் ஐ. எஸ். பாக்கியநாதன்	7	50
62.	,, II	,,	7	00
63.	,, III	பி. இராமாநுஜம் தேவதாஸ்	7	75
64.	ஆக்ஸ்ஃபோர்டின் இந்திய வரலாறு—I	தி. வெ. குப்புசாமி	8	25
65.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	7	50
66.	,, III	க. த. திருநாவுக்கரசு	10	50
67.	முகலாயப் பேரரசு—I	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப், எம். எக்ஸ். மிராண்டா	7	50
68.	,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா, பா. மாணிக்கவேலு	7	75
69.	ஆங்கில அரசியலமைப்பின் வரலாறு—I	வை. விருத்தகிரீசன்	7	50
70.	,, II	வை. விருத்தகிரீசன், இரா. அண்ணுமலை	6	75
71.	,, III	இரா. அண்ணுமலை, பா. மாணிக்கவேலு	6	50
72.	,, IV	பா. மாணிக்கவேலு	7	00
73.	ஆங்கிலேயரின் சமுதாய வரலாறு—I	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன்	6	50
74.	,, II	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன், இர. ஆலாலசுந்தரம்	6	75
75.	,, III	ஆர். ஆலாலசுந்தரம்	6	50
76.	இந்தியாவில் முகலாயரின் ஆட்சி—I	பா. மாணிக்கவேலு	5	00
77.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	6	00

அரசியல்

*78.	அரசியல் அமைப்புகள்	ஜே. இராமச்சந்திரன்	4	62
*79.	அரசாங்கத்தின் வரலாறு	மோ. கிளாரன்சு, டி. டி. பெலிக்ஸ்	7	50
*80.	இந்திய அரசியலமைப்பு	வீ. கண்ணையா	4	75
81.	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	டி. செல்லப்பா	8	50
82.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	8	50
83.	பன்னாட்டு அரசியல்—I	திருமதி நூர்ஜஹான் பாவா	16	00
84.	,, II	,,	13	25
85.	பொதுத்துறை ஆட்சி இயல்—I	வீ. கண்ணையா	9	00
86.	,, II	அ. ஜெகதீசன்	7	25
87.	பொதுத்துறை ஆட்சியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	வீ. கண்ணையா	7	50
88.	,, II	டி. செல்லப்பா	7	50
89.	இந்திய அரசியலமைப்புத் திட்டம்	தி. வெ. குப்புசாமி, எஸ். சுப்பிரமணியன்	9	25
90.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—I	வீ. கண்ணையா	6	25
91.	,, II	வீ. கண்ணையா, கி. ர. அனுமந்தன்	5	75
92.	,, III	கி. ர. அனுமந்தன்	7	25
*93.	மக்கள் ஆட்சி	க. சந்தானம்	4	25
94.	1919 முதல் சர்வதேச உறவுகளும் உலக அரசியலும்—I	என். ஜே. இராஜகோபால்	7	75
95.	சமூக, அரசியல் கொள்கையின் அடிப்படைகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	7	00
96.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	பா. சூரியநாராயணன்	5	75

* மூல நூல் (Original Book)

அரசியல் (தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
97.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம்—II	பா. சூரியநாராயணன், கி. ர. அனுமந்தன்	6	00
98.	,, III	கி. ர. அனுமந்தன்	5	75

உளவியல்

99.	குழந்தை உளவியல்—I	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	8	00
100.	,, II	,,	7	00
101.	உட்கவர் மனம்	சி. ந. வைத்தீஸ்வரன்	7	00
102.	இளையோர் உளவியல்—I	தி. இரா. அரங்கராசன்	12	00
103.	,, II	,,	9	00
104.	சமூக உளவியல்	என். வேதமணி மானுவேல்	9	25
105.	பிறழ்நிலை உளவியல்	அ. பெசன்ட் கிரிப்பர் ராஜ்	11	00
106.	பித்தரின் உள்ளம்	,,	3	00
*107.	குமர உள்ளம்	டாக்டர் மு. அறம்	6	25
*108.	உளநலவியல்	டாக்டர் தா. ஏ. சண்முகம்	6	00

தத்துவம்

109.	இந்து சமயத் தத்துவம்	ஞா. ராஜாபகதூர்	5	50
*110.	அறிவு ஆராய்ச்சி இயல்	ஆர். இராமானுஜாச்சாரி	3	50
*111.	மேலைநாட்டுத் தத்துவம்	ஆர். எஸ். தேசிகன்	3	50
112.	அத்துவித தத்துவம்	கோ. மோ. காந்தி	6	50
113.	ஆங்கிலேயப் பயன்வழிக் கொள்கையினர்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	5	50

114.	இந்தியத் தத்துவம்—I	... வ. ஆ. தேவசேனபதி, ப. நா. ஷண்முகசுந்தரம்	... 3	50
115.	,, II	... ,,	... 6	00
116.	மெய்ப்பொருளியல்–ஓர் அறிமுகம்—I	... சி. இராமலிங்கம்	... 6	00

அறவியல்

117.	அறவியல்–ஓர் அறிமுகம்	... கோ. மோ. காந்தி	... 8	50

அளவையியல்

118.	அளவை இயல்—தொடக்க நூல்	... கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	... 2	50

மானிடவியல்

*119.	மானிடவியல்	... ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன்	... 4	75
120.	பண்பாட்டுக் கோலங்கள்	... கி. பூ. சுப்பிரமணியன்	... 5	50
121.	இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை	... எஸ். இலட்சுமி	... 3	50

சமூகவியல்

122.	சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள்	... ஜெ. நாராயணன்	... 10	50

* மூல நூல் (Original Book)

புவியியல்

				ரூ.	காசு
*123.	ஆசியா—I	...	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	... 9	50
*124.	,, II	...	,,	... 8	75
*125.	ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல்	...	எ. எஸ். நாராயணன்	... 8	50
*126.	தென்கிழக்கு ஆசியா	...	ஜி. கிருஷ்ணமூர்த்தி	... 8	50
*127.	வட அமெரிக்கா	...	குமாரி இரா. அலமேலு	... 6	50
*128.	தென் அமெரிக்கா	...	எம். என். பத்மநாபன்	... 9	00
*129.	தென் கண்டங்கள்—ஆஸ்திரேலியா	...	திருமதி எச். நியூமன்	... 3	00
*130.	,, ஆஃப்ரிக்கா	...	எஸ். முத்துக்கிருஷ்ணக் கரையாளர்	... 3	25
*131.	புவிப்புறவியல்—II	...	நா. அனந்தபத்மநாபன்	... 6	00
*132.	செய்முறைப் புவியியல்	...	சு. ஜெயச்சந்திரன்	... 5	50
*133.	மக்கட் பரப்பியல்	...	வி. எஸ். அனந்தபத்மனுபன்	... 4	75
*134.	சமுத்திரவியல்	...	கோ. இராமசாமி	... 6	50
135.	காலநிலே இயல்—I	...	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	... 10	00
136.	,, II	...	,,	... 5	00
*137.	காலநிலே இயல்—I	...	திருமதி இராதா	... 9	50
*138.	,, II	...	,,	... 8	00
139.	வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	...	கோ. இராமசாமி	... 5	50
*140.	புவி அமைப்பு இயல்	...	சி. விசுவநாதன்	... 4	75
141.	பௌதிகப் புவியியலும் புவியமைப்பியலும்	...	கோ. இராமசாமி	... 6	00
142.	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல்—I	...	எஸ். மாணிக்கம்	... 9	50
143.	,, II	...	ம. கார்த்திகேயன்	... 12	00

144.	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல்—III	... கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	...	5	75

புள்ளியியல்

*145.	புள்ளியியல்—அறிமுகம்	... சு. வைத்தியநாதன்	...	10	75
146.	புள்ளியியல் முறைகள்—I	... கோ. சண்முகசுந்தரம்	...	10	00
147.	,, II	... கே. ஆர். இராஜகோபாலன்	...	14	00
148.	நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம்	... தி. வி. லட்சுமிநரசிம்மன்	...	6	50

உயர் கணிதம்

*149.	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்	... டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை	...	4	25
*150.	வகை நுண்கணிதம்	... ,,	...	3	00
*151.	தொகை நுண்கணிதம்	... தி. கோவிந்தராசன்	...	3	25

விலங்கியல்

*152.	விலங்கியல்	... பெ. மா. அண்ணாமலை, இரா. முருகேசன்	...	12	00

பௌதிகவியல்

153.	ஒளி நூல்	... ச. சம்பத்து	...	10	00

விஞ்ஞானம்

*154.	வானவெளி வெற்றி	... டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	...	6	00
*155.	ரேடியோ	... டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம்	...	4	75

* மூல நூல் (Original Book)

விஞ்ஞானம் (தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
*156.	எக்ஸ்-கதிர்கள்	... பெ. நா. அப்புசாமி, ஜே. பி. மாணிக்கம்	... 4	50
*157.	பாம்புகள்	... பெ. மா. அண்ணுமலை	... 3	50
*158.	தாவரம்-வாழ்வும் வரலாறும்—I	... டாக்டர் கு. சீனிவாசன்	... 8	00
*159.	கரும்பு	... டாக்டர் கு. பெரியசாமி	... 4	00
*160.	தாவரங்களின் வாழ்வியல்	... எஸ். சுந்தரம்	... 6	50

மருத்துவம்

*161.	நீரிழிவு—க்ஷயரோகம்	... டாக்டர் ஜி. வேங்கடசாமி, டாக்டர் ஏ. கதிரேசன்	... 2	50
162.	மகப்பேறும் மாதர்நோயும்	... டாக்டர் (குமாரி) ந. மணிமேகலை	... 8	25
*163.	பாக்டீரியா	... சு. சுந்தரம்	... 2	50
164.	புற்றுநோய்	... அ. கதிரேசன்	... 3	50
165.	உடலியங்கியல்—I	... டாக்டர்கள் ஜி. வேங்கடசாமி, டி. சரோஜினி, எஸ். கே. துரைராஜ், ஆர். சேது	... 6	75
166.	,, II	... ,,	... 5	50
167.	என்புருக்கி நோய்	... டாக்டர் அ. கதிரேசன்	... 7	25

பொறியியல்

168.	நீங்களே உங்கள் வீட்டைக் கட்டலாம்	... கே. வி. கிருஷ்ணராஜ், சி. ஆர். சுப்பிரமணியம், கே. வேணுகோபால் ஆர். இராமசுவாமி	... 8	50

கூட்டுறவு

169.	உலகக் கூட்டுறவு இயக்கம்	... அ. வேல்மணி	... 5	50

சட்டம்

*170.	குற்றவியல் சட்டம்	... மா. சண்முகசுப்பிரமணியம்	...	10	00

பொது நூல்கள்

171.	மகாத்மா காந்தி	... சரஸ்வதி தங்கையன்	...	3	25
172.	விவசாயப் புரட்சி	... வி. கார்த்திகேயன்	...	8	00
173.	சேமக் கை-நூல்	... ஆ. சுப்பிரமணியன்	...	2	50
*174.	முற்காலச் சோழர் கலையும் சிற்பமும்	... எஸ். ஆர். பாலசுப்பிரமணியம்	...	9	00
*175.	உணவும் ஊட்டமும்	... தி. வேங்கடகிருஷ்ண அய்யங்கார்	...	4	50
*176.	பள்ளி நிருவாக அமைப்பு—அடிப்படைக் கருத்துகள்	... எஸ். சந்தானம், எஸ். ஏ. துரைசிங்	...	6	25

புகுமுக (P.U.C.) வகுப்புகளுக்குரியவை

*177.	உலக வரலாறு	... டி. ஆர். இராமச்சந்திரன்	...	4	00
*178.	பொருளாதாரம்	... ஜி. சிதம்பரம்	...	2	75
*179.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	... கு. ஆளுடையபிள்ளை	...	2	50
*180.	,, II	... ,,	...	2	25
*181.	பௌதிகம்	... டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம், ஆர். நாகராஜன்	...	6	00
*182.	புகுமுக பௌதிகம்	... டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	...	5	75
*183.	பௌதிகம்—ஓர் அறிமுகம்	... எஸ். சம்பத்	...	7	00
*184.	புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்—I	... கே. இராஜகோபாலன்	...	7	00
*185.	,, II	... ,,	...	3	00

* மூல நூல் (Original Book)

புகுமுக (P.U.C.) வகுப்புகளுக்குரியவை (தொடர்ச்சி)

				ரூ.	காசு
*186.	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல்—I	...	டி. கோவிந்தராஜன், முத்துசாமி ...	7	00
*187.	,, II	...	,, ...	4	50
*188.	கணிதம்—ஓர் அறிமுகம்—I	...	ஆர். மகாதேவன் ...	4	75
*189.	,, II	...	,, ...	3	25
*190.	வேதியியல்	...	பி. டி. முனியப்பா, ஆர். முத்துலட்சுமி ...	7	00
*191.	புகுமுக வேதியியல்	...	சி. ஏ. பத்மநாபன் ...	5	50
*192.	விலங்கியல்	...	எஸ். ஆப்ரகாம் ...	4	00
*193.	புகுமுக விலங்கியல்	...	பெ. மா. அண்ணாமலை ...	7	25
*194.	புகுமுக வகுப்புத் தாவரவியல்	...	எஸ். சுந்தரம் ...	4	00

பட்டப்படிப்பிற்குரிய (பி.எஸ்ஸி.) நூல்கள்

(அடக்கவிலைப் பதிப்புகள் – கழிவு இல்லை)

பௌதிகம்

*195.	எந்திரவியல்—சிறப்புப் பாடம்—I	...	ஆர். நாகராசன் ...	6	25
*196.	,, II	...	,, ...	5	50
*197.	வெப்பவியல்—சிறப்புப் பாடம்	...	கே. நாச்சிமுத்து ...	5	25
*198.	செய்முறை பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம்—I	...	டி. கமலக்கண்ணன், ஆர். கிருட்டிணசாமி ...	4	50
*199.	,, II	...	,, ...	3	25
*200.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம்—I	...	பி. தங்கராஜன் ...	3	60
*201.	,, II	...	,, ...	3	00
*202.	செய்முறை பௌதிகம்—துணைப் பாடம்	...	கே. பாசுகரன், இரா. செயராம் ...	4	50

*203.	மின்னியல்-காந்தவியல்—சிறப்புப் பாடம்—I ...	டி. ஏ. கருப்பண்ணன் ...	4	75
*204.	,, II ...	,, ...	4	50
*205.	,, III ...	,, ...	4	25
*206.	ஒளியியல்—சிறப்புப் பாடம் ...	டாக்டர் வி. சண்முகசுந்தரம், டாக்டர் ஆர். சபேசன் ...	7	75
*207.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம் (பகுதி - 2) (முதல் புத்தகம்) ...	கா. வே. சுப்பிரமணியன் ...	6	00
*208.	,, (இரண்டாம் புத்தகம்) ...	கா. வே. சுப்பிரமணியன் ...	4	50
*209.	பொது பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம் ...	கே. பி. கந்தசாமி, எம். தியாகசுந்தரம் ...	4	50
*210.	இன்றைய பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம் ...	எம். ஏ. தங்கராஜ் ...	6	75
*211.	ஒலி நூல்—சிறப்புப் பாடம் ...	டி. முருகையன் ...	5	00

வேதியியல்

*212.	செய்முறைக் கனிம வேதியியல்— துணைப் பாடம் ...	டாக்டர் என். முத்துக்குமாரசுவாமி ...	2	00
*213.	,, சிறப்புப் பாடம்...	டி. இராமலிங்கம் ...	2	25
*214.	பௌதிக வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்—I ...	டி. சக்திவேலு ...	4	00
*215.	,, II ...	,, ...	3	50
*216.	கனிம வேதியியல்—துணைப் பாடம் ...	சி. ஏ. பத்மநாபன் ...	6	50
*217.	கனிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்—I ...	பி. டி. முனியப்பா ...	4	00
*218.	,, II ...	,, ...	4	25

*மூல நூல் (Original Book)

வேதியியல்—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	காசு
*219.	பொது பௌதிக வேதியியல்—துணைப் பாடம் ...	ஆர். துளசிதாஸ் ...	4	75
*220.	அறிமுறை வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்—I ...	ஓ. ஆர். சூரியநாராயணன் ...	4	50
*221.	,, II ...	,, ...	3	75
*222.	செய்முறைக் கரிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம் ...	என். ஆறுமுகம் ...	3	50
*223.	அங்கக வேதியியல்—துணைப் பாடம் ...	பி.எல். இராமசாமி ...	5	00
*224.	அங்கக வேதியியல்—I ...	எம். ஆட்கொண்டான் ...	3	00
*225.	கரிம வேதியியல்—பகுதி-I (இரண்டாம் புத்தகம்).	கி. கண்ணபிரான் ...	4	75
*226.	,, (மூன்றும் புத்தகம்)...	,, ...	3	25
*227.	கரிம வேதியியல்—பகுதி-II (முதல் புத்தகம்) ...	,, ...	5	75
*228.	,, (இரண்டாம் புத்தகம்)...	,, ...	6	00

கணிதம்

*229.	இயற்கணிதம்—சிறப்புப் பாடம்—I ...	டி. கோவிந்தராஜன், கே. முத்துசாமி ...	4	25
*230.	,, II ...	,, ...	3	25
*231.	தொகுமுறை வரைகணிதம்—சிறப்புப் பாடம் ...	ஆர். மகாதேவன் ...	2	00
*232.	எண்சார் கணிதம்—சிறப்புப் பாடம் ...	எம். எம். இராமசாமி ...	5	50
*233.	திரிகோண கணிதம்—சிறப்புப் பாடம் ...	வி. அரங்கநாதன் ...	3	25
*234.	கணிதம்—துணைப் பாடம் ...	ஆர். அனுமந்தராவ் ...	6	00
*235.	நிலையியல்—சிறப்புப் பாடம் ...	கே. இராஜகோபாலன் ...	5	00
*236.	முப்பரிமாணப் பகுமுறை வடிவ கணிதம்—சிறப்புப் பாடம் ...	கே. சிவசுப்ரமணியன் ...	2	75
*237.	வெக்டர் கணிதமும் அதன் பயன்பாடுகளும்—சிறப்புப் பாடம் ...	ஆர். மகாதேவன் ...	2	00

*238.	கணிதம்—துணைப் பாடம்—பகுதி-2	...	ஆர். அய்யாசாமி	... 5	75
*239.	வானியல்—சிறப்புப் பாடம்—(முதல் புத்தகம்)	...	தி. கோவிந்தராசன், கொ. முத்துசாமி	... 5	50
*240.	,, (இரண்டாம் புத்தகம்)	...	,,	... 3	75
*241.	இயக்கவியல்—சிறப்புப் பாடம்	...	ஆர். மகாதேவன், கே. சிவசுப்பிரமணியம், பி. ஆர். சுப்பிரமணியம்	... 7	00
புள்ளியியல்					
*242.	புள்ளியியல்—துணைப் பாடம்	...	எஸ். கருப்பையா	... 3	50
விலங்கியல்					
*243.	முதுகெலும்பற்றவை-1—சிறப்புப் பாடம்	...	ஆர். முருகேசன்	... 6	00
*244.	,, 2 ,,	...	திருமதி எஸ். கே. வள்ளி	... 6	00
*245.	முதுகுநாணுள்ளவை-1—சிறப்புப் பாடம்	...	திருமதி ராணி கந்தசாமி	... 5	00
*246.	,, 2 ,,	...	,,	... 9	75
*247.	முதுகுத் தண்டுள்ளவை-2—சிறப்புப் பாடம்	...	திருமதி கிருஷ்ணவேணி நாராயணன்	... 5	75
*248.	முதுகெலும்பிகளது கருவியல்—சிறப்புப் பாடம்	...	எஸ். ஆப்ரகாம்	... 9	00
*249.	முதுகெலும்பற்றவை—துணைப் பாடம்	...	என். இராமலிங்கம்	... 9	00
*250.	முதுகு நாணுள்ளவை—துணைப் பாடம்	...	வி. சேது	... 6	00
*251.	செல்லியல்—சிறப்புப் பாடம்	...	என். இராமலிங்கம்	... 5	50
*252.	மரபியல்—சிறப்புப் பாடம்	...	பெ. மா. அண்ணாமலை	... 5	25
*253.	சூழ்நிலையியல்—உடற் செயலியல்— சிறப்புப் பாடம்—I	...	டி. ஆர். கிருஷ்ணன்	... 4	75
*254.	,, II	...	,,	... 6	50
*255.	பரிணாமம்	...	எஸ். ஆப்ரகாம்	... 6	25

* மூல நூல் (Original Book)

தாவரவியல்

*256.	தாவர வெளி, உள்ளமைப்பியல்களும் வகைப்பாட்டியலும்—சிறப்புப் பாடம்	கே. இராஜசேகரன்	11	00
*257.	தாவரப் புற அமைப்பியல்—சிறப்புப் பாடம்	கே. பாலச்சந்திரகணேசன்	9	25
*258.	தாவர உள்ளமைப்பியல்—சிறப்புப் பாடம்	டாக்டர் ஏ. கோவிந்தராஜுலு	7	25
*259.	தாவரங்களின் வாழ்க்கை—சிறப்புப் பாடம்	எஸ். சுந்தரம்	9	50
*260.	தாவரவியல்—துணைப் பாடம்	பா. இராசாராம்	4	50
*261.	தாவரச் சூழ்நிலையியல், மரபியல், உயிர்மரூஉ இயல், இயங்கியல்—துணைப் பாடம்	கே. பெரியசாமி	4	00
*262.	சூழ்நிலையியல், பரிணாமம், மரபியல்—சிறப்புப் பாடம்	கே. ஆர். பாலச்சந்திரகணேசன்	8	25
*263.	டெரிடோஃபைட்டா, ஜிம்னோஸ்பெர்மே—சிறப்புப் பாடம்	கே. இராஜசேகரன்	10	25
*264.	தாலோஃபைட்டா (பாசிகளும் பூஞ்சைகளும்)—சிறப்புப் பாடம்	டாக்டர் வே. சோ. சுந்தரலிங்கம்	9	00
*265.	தாவர வகைப்பாட்டியல்—சிறப்புப் பாடம்	ஆ. சம்பத்குமார்	10	50
*266.	பிரையோஃபைட்டா—சிறப்புப் பாடம்	கே. இராஜசேகரன்	6	00

* மூல நூல் (Original Book)

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை

✱

பின்வரும் பொருள்களில்

பட்டப்படிப்பிற்குரிய நூல்கள்

விரைவில் வெளிவரும்

கணிதம்	—	41	நூல்கள்
பௌதிகம்	—	28	,,
வேதியியல்	—	39	,,
தாவரவியல்	—	30	,,
விலங்கியல்	—	40	,,
பொறியியல்	—	50	,,
வரலாறு	—	45	,,
அரசியல்	—	34	,,
பொருளாதாரம்	—	83	,,
வணிகவியல்	—	36	,,
புள்ளியியல்	—	16	,,
உளவியல்	—	8	,,
புவியியல்	—	18	,,